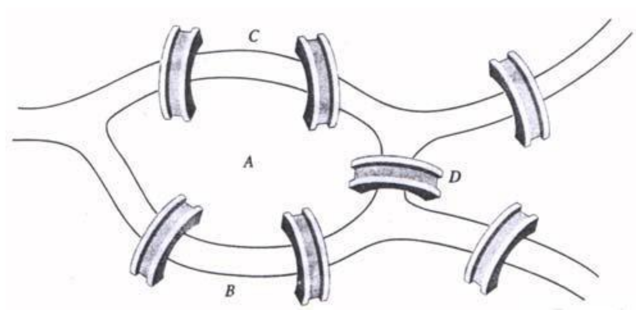
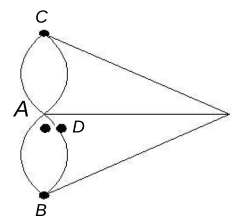
LOGIKA DAN ALGORITMA

DASAR – DASAR TEORI GRAF

- Kelahiran Teori Graf

  Sejarah Graf : masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)





Gbr 1. Masalah Jembatan Königsberg

Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg :

Simpul (*vertex*) ➪ menyatakan daratan

Ruas (*edge*) ➪ menyatakan jembatan

Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

- Perjalanan Euler adalah :

  Perjalanan dari suatu simpul kembali ke simpul tersebut dengan melalui setiap ruas tepat satu kali.

- Perjalanan Euler akan terjadi, jika :
  - Graf terhubung.
  - Banyaknya ruas yang datang pada setiap simpul adalah genap.

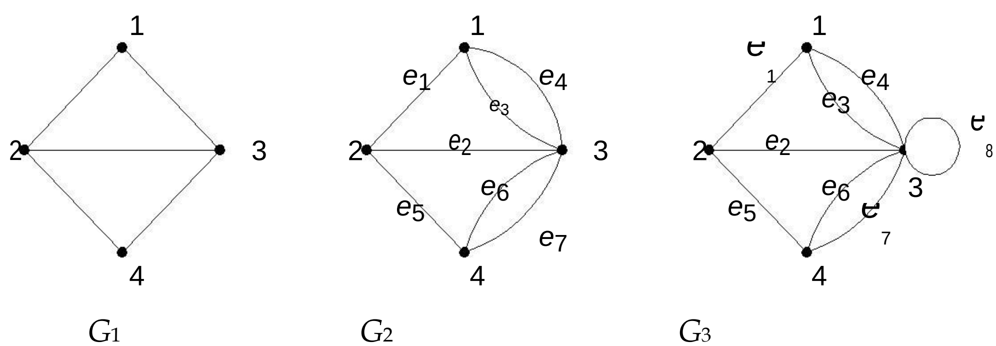
- Definisi Graf

  Graf G (V, E), adalah koleksi atau pasangan dua himpunan

  (1) Himpunan V yang elemennya disebut *simpul* atau *titik*, atau *vertex*, atau *point*, atau *node*.

  (2) Himpunan E yang merupakan pasangan tak terurut dari simpul, disebut *ruas* atau *rusuk*, atau *sisi*, atau *edge*, atau *line*.

- Banyaknya simpul (anggota V) disebut *order* Graf G, sedangkan banyaknya ruas (anggota E) disebut *ukuran (size)* Graf G



Gbr 2. (G_1) graf sederhana, (G_2) multigraf, dan (G_3) multigraf

Pada Gbr 2, G_1 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

G_2 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) } = { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}

G_3 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) }

= { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}

- Pada G_2, sisi e_3 = (1, 3) dan sisi e_4 = (1, 3) dinamakan **ruas berganda** atau **ruas sejajar** (*multiple edges* atau *paralel edges*), karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

- Pada G_3, sisi e_8 = (3, 3) dinamakan **gelung** atau **self-loop** karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

<u>JENIS – JENIS GRAF</u>

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

  1. **Graf sederhana** (*simple graf*).

     Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.

  2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graf/multigraf*).

     Graf yang mengandung ruas ganda atau gelung dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graf* atau *multigrapf*).

- Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

  1. **Graf berhingga** (*limited graf*)

     Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya, n, berhingga.

2. **Graf tak-berhingga** (*unlimited graf*)

   Graf yang jumlah simpulnya, *n*, tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

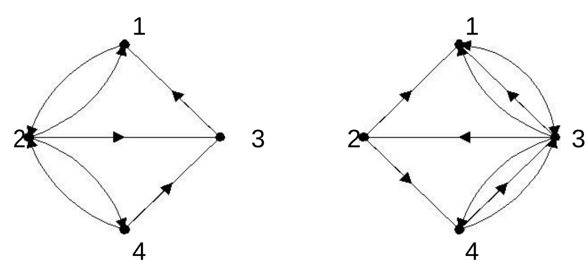
  1. **Graf tak-berarah** (*undirected graf*)

     Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

  2. **Graf berarah** (*directed graf* atau *digraf*)

     Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

     Dua buah graf pada Gbr 3 adalah graf berarah.



(a) G_4 (b) G_5

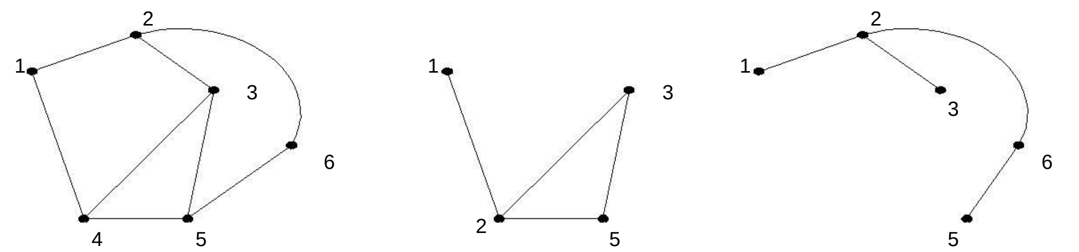
Gbr 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

TERMINOLOGI GRAF

- **Subgraf dan Komplemen Subgraf**

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **subgraf** (*subgraf*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari subgraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

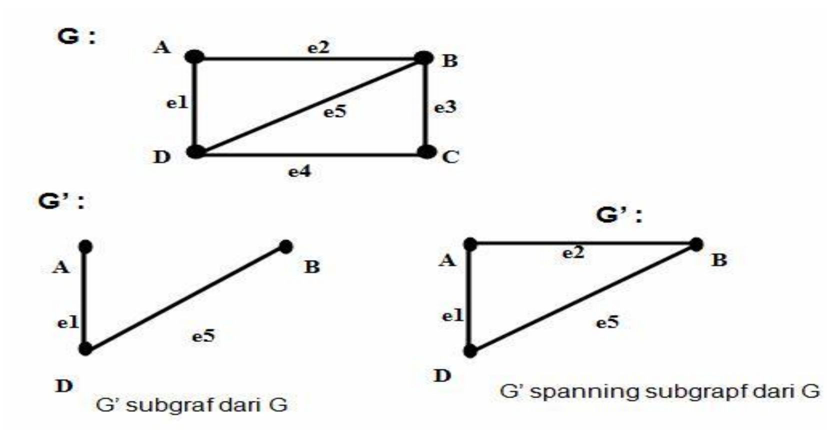


(a) Graf G_1 (b) Subgraf (c) Komplemen Subgraf (b)

- **Subgraf yang Direntang (*Spanning Subgraf*)**

  Apabila <u>E'</u> mengandung semua ruas di <u>E</u> yang kedua ujungnya di <u>V'</u> , maka <u>G'</u> adalah Subgraf yang dibentuk oleh <u>V'</u> (**Spanning Subgraph)**

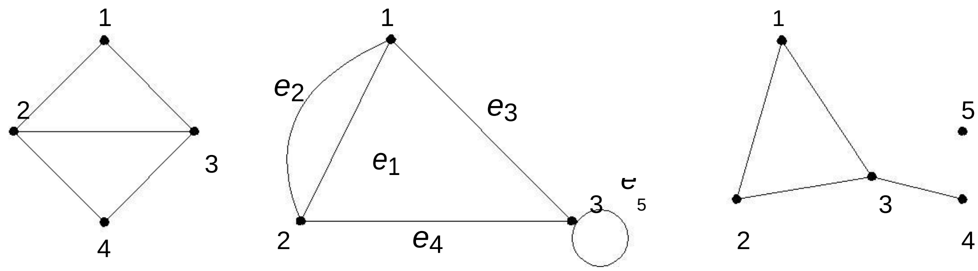
  Contoh :



- **Derajat (*Degree*)**

  Derajat suatu simpul $d(v)$ adalah banyaknya ruas yang menghubungkan suatu simpul.

  Sedangkan *Derajat* Graf G adalah jumlah derajat semua simpul Graf G.



Graf G_1 Graf G_2 Graf G_3

graf G_1 : $d(1) = d(4) = 2$

$d(2) = d(3) = 3$

graf G_3 : $d(5) = 0$ ⇨ simpul terpencil / simpul terisolasi

$d(4) = 1$ ⇨ simpul bergantung / simpul akhir

graf G_2 : $d(1) = 3$ ⇨ bersisian dengan ruas ganda

$d(3) = 4$ ⇨ bersisian dengan self-loop (derajat sebuah self-loop = 2)

Jumlah derajat semua simpul Graf (derajat Graf) = dua kali banyaknya ruas Graf (size/ukuran Graf).

- **Ketetanggaan (*Adjacent*)**

  Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung. graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,

  simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

- **Bersisian (*Incidency*)**

  Untuk sembarang ruas $e = (v_j, v_k)$ dikatakan :

  e bersisian dengan simpul v_j ,

  atau e bersisian dengan simpul v_k

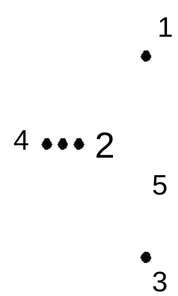
graf G_1: ruas (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
ruas (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
tetapi ruas (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

- **Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)**

  Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.

- ***Graf Kosong* (null graf *atau* empty graf*)***

  Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n). Graf N_5 :



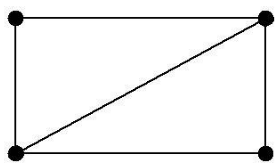
<u>OPERASI GRAF</u>

G1 = (E1,V1) , G2 = (E2,V2)

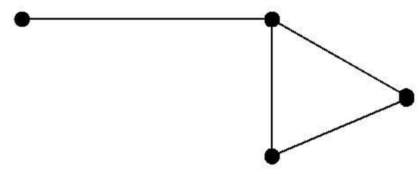
1. Gabungan G1 ∪ G2 adalah graf dgn himpunan ruasnya **E1 ∪ E2**.
2. Irisan G1 ∩ G2 adalah graf dgn himpunan ruasnya **E1 ∩ E2**.
3. Selisih G1 - G2 adalah graf dgn himpunan ruasnya **E1 - E2**.
4. Selisih G2 – G1 adalah graf dgn himpunan ruasnya **E2 - E1**.
5. Penjumlahan ring G1 ⊕ G2 adalah graf dgn himpunan ruasnya **(E1 ∪ E2) - (E1 ∩ E2)** atau **(E1 - E2) ∪ (E2 - E1)**.

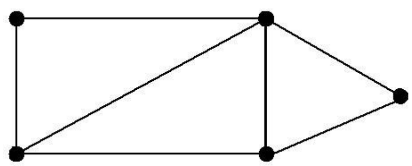
Contoh :

Graf G1



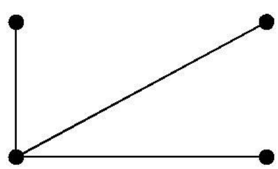
Graf G2



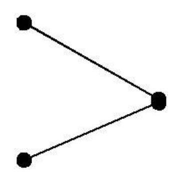


G1 ∪ G2

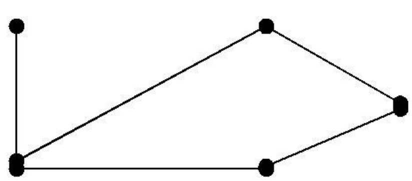
G1 ∩ G2



G1 - G2



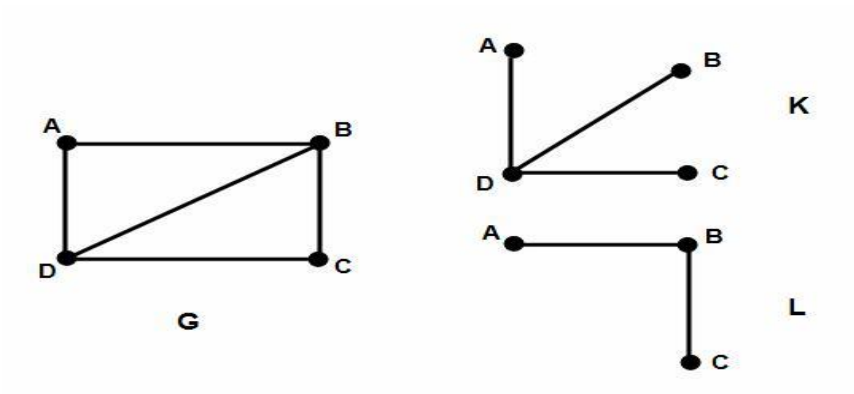
G2 – G1



G1 ⊕ G2

DEKOMPOSISI

Suatu graf G dikatakan dikomposisikan menjadi K dan L bila G = K ∪ L dan K ∩ L = ∅
Contoh :



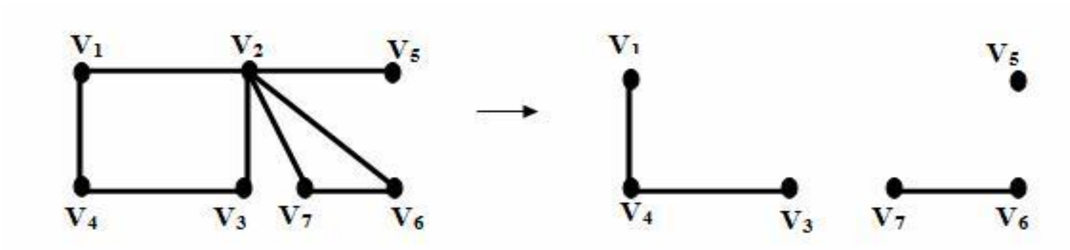
PENGHAPUSAN (DELETION)

Penghapusan dapat dilakukan pada simpul ataupun ruas.

1) Penghapusan Simpul .

Notasinya : G – {V}

Contoh :

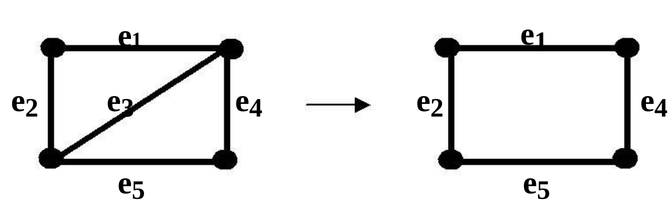


Penghapusan Simpul V_2

2) Penghapusan Ruas .

Notasinya : G – {e}

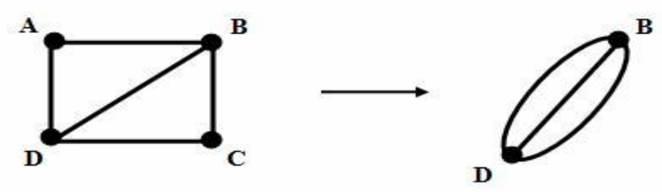
Contoh :



PEMENDEKKAN (SHORTING)

Pemendekan/Shorting adalah menghapus simpul yang dihubungkan oleh 2 ruas (simpul berderajat 2), lalu menghubungkan titik-titik ujung yang lain dari kedua ruas tersebut.

Contoh :



pemendekan terhadap simpul A dan C

KETERHUBUNGAN

- **Perjalanan (Walk)**

  Perjalanan atau walk pada suatu Graf G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti

  $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n \Rightarrow$ ruas e_i menghubungkan v_i dan v_{i+1}

  dapat hanya ditulis barisan ruas atau barisan simpul saja.

  $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ atau $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$

  Dalam hal ini, v_1 disebut simpul awal, dan v_n disebut simpul akhir.

  Perjalanan disebut *perjalanan tertutup* bila $v_1 = v_n$, sedangkan Perjalanan disebut *perjalanan tebuka* yang menghubungkan v_1 dan v_n. **Panjang Perjalanan** adalah banyaknya ruas dalam barisan tersebut.

- **Lintasan (*Trail*)**

  Lintasan adalah Walk dengan *semua ruas* dalam barisan adalah berbeda.

- **Jalur (Path)**

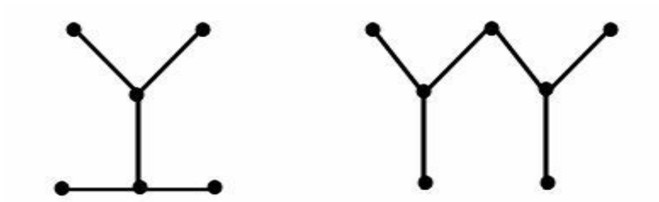
  Jalur adalah Walk yang semua simpul dalam barisan adalah berbeda.

- **Sirkuit (*Cycle*)**

  Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**. **Panjang sirkuit** adalah jumlah ruas dalam sirkuit tersebut.

Graf yang tidak mengandung sirkuit disebut *acyclic.*

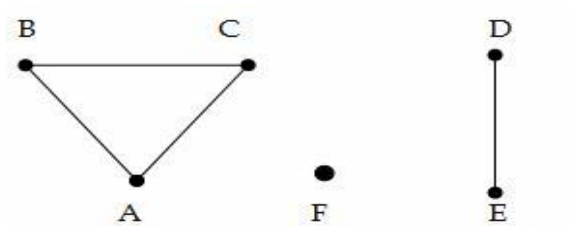
Contoh :



Suatu graf G disebut terhubung jika untuk setiap simpul dari graf terdapat jalur yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Subgraf terhubung suatu graf disebut ***komponen dari G*** bila subgraf tersebut tidak terkandung dalam subgraf terhubung lain yang lebih besar.

Contoh :



Gambar : Graf G

Rank (G) = n – K
Nullity (G) = e – (n – k)

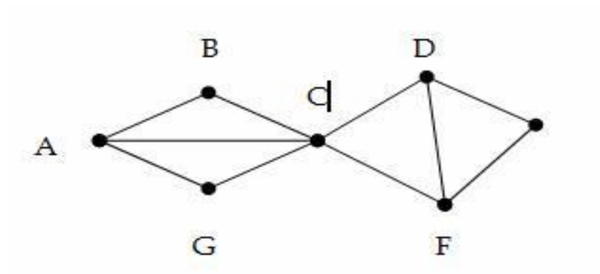
Dimana : n : Order graf G e :

Size graf G

K : banyaknya komponen graf G

Jarak antara 2 simpul dalam graf G adalah panjang jalur terpendek antara ke 2 simpul tersebut.

Diameter suatu graf terhubung G adalah maksimum jarak antara simpul G.

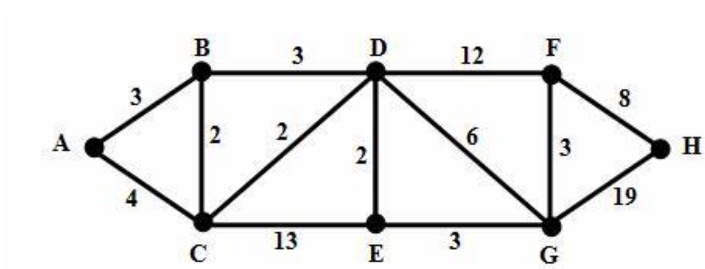


Jarak maksimum dalam graf G adalah 3 (yaitu antara A – G atau B - G ataupun C - G), jadi diameter = 3

GRAF BERLABEL

Graf berlabel/ berbobot adalah graf yang setiap ruasnya mempunyai nilai/bobot berupa bilangan non negatif.

Contoh :



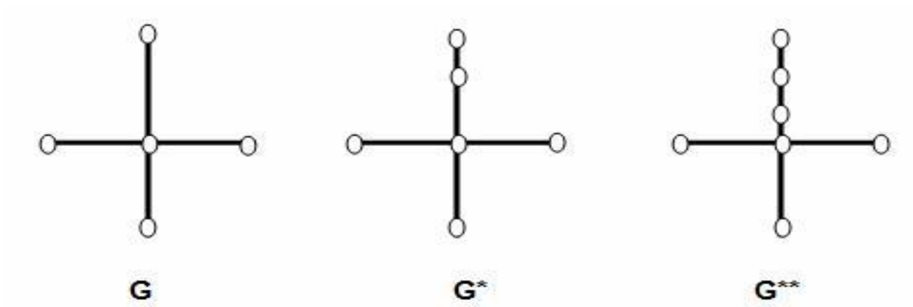
ISOMORFISMA

Dua buah graf atau lebih yang mempunyai jumlah ruas, simpul, dan derajat yang sama. Contoh :

HOMOMORFISMA

Dua buah graf aau lebih yang penggambarannya sama, tetapi jumlah ruas dan simpulnya berbeda.

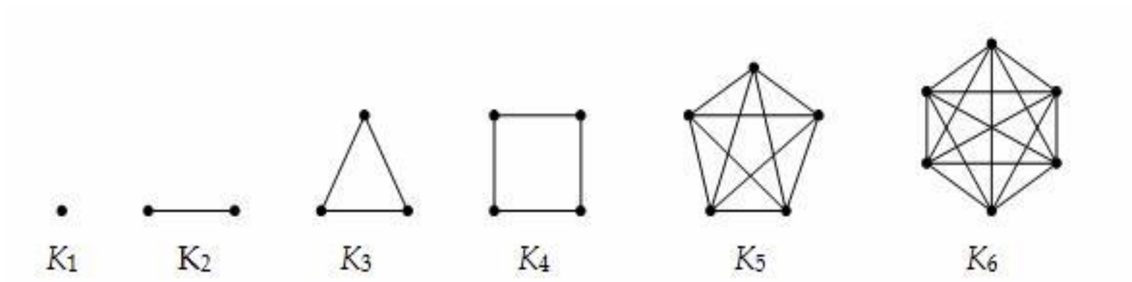
Contoh :



BEBERAPA GRAF SEDERHANA KHUSUS

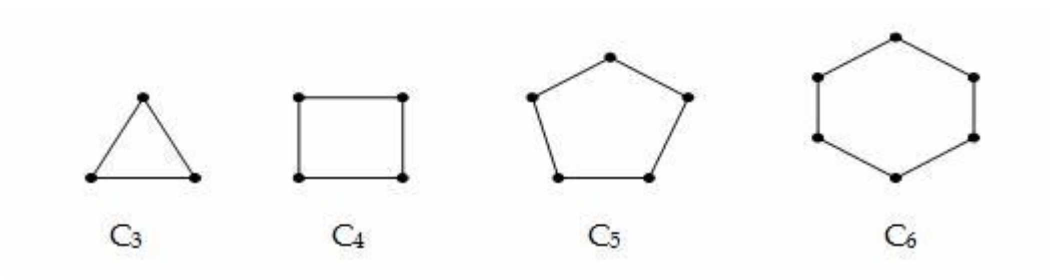
a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.



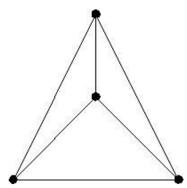
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



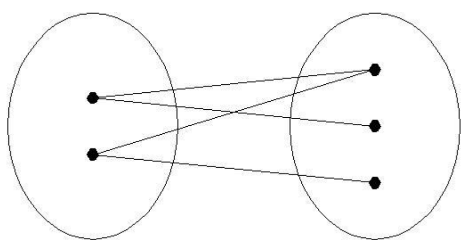
c. **Graf Teratur (*Regular Graphs*)**

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



d. Graf *Bipartisi* (*Bipartite Graph*)

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartisi** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Dilambangkan K_{MN}.



e. Graf Platonik

Graf yang berasal dari penggambaran bangun ruang, dimana titik sudut merupakan simpul, dan rusuk meruakan ruas.