Teori Dasar Graf (Lanjutan)

MATRIKS DAN GRAF

Untuk menyelesaikan suatu permasalahan model graf dengan bantuan komputer, maka graf tersebut disajikan dalam bentuk matriks. Matriks-matriks yang dapat menyajikan model graf tersebut antara lain :

a) Matriks Ruas

- Matriks ukuran (2 X M) atau (M X 2) yang menyatakan ruas dari Graf.
- Matriks ini tidak dapat mendeteksi adanya simpul terpencil, kecuali jumlah simpul yang terdapat dalam Graf disebutkan.

b) Matriks Adjacency

Notasi :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ bila ada ruas } (v_i, v_j) \\ p, \text{ bila ada p ruas menghubungkan } (v_i, v_j) \\ 0, \text{ dalam hal lain} \end{cases}$$

- Matriks adjacency merupakan matriks simetri.
- Elemen yang tidak bernilai nol pada diagonal utama menyatakan suatu ***loop.***
- ***Simpul terpencil*** dapat dideteksi bila ada baris yang semua elemennya bernilai nol.

c) Matriks Incidence

Notasi :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ bila ada ruas } (v_i, v_j) \\ 2, \text{ bila ada gelang (\textit{self-loop}) menghubungkan } (v_i, v_i) \\ 0, \text{ dalam hal lain} \end{cases}$$

- Jumlah elemen tidak nol pada suatu baris menunjukkan derajat dari simpul.
- Setiap kolom mempunyai tepat dua elemen yang tidak nol.
- Suatu kolom yang hanya mempunyai satu elemen tidak nol menunjukkan suatu ***loop***.

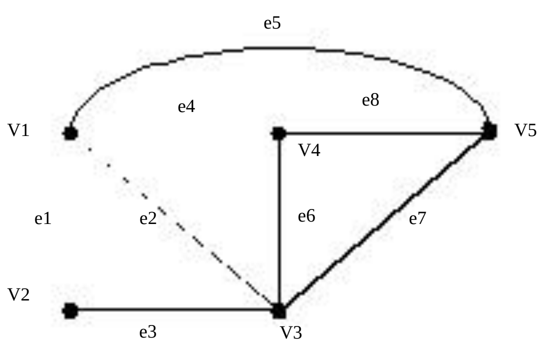
d) Matriks Connection

Notasi :

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{bila i = j atau ada jalur antara simpul i dan simpul j} \\ 0, & \text{dalam hal lain} \end{cases}$$

- Graf terhubung jika dan hanya jika matriks tidak mengandung elemen nol.
- Tidak dapat mendeteksi adanya ruas sejajar dan loop.

Sebagai contoh, untuk graf seperti di bawah ini :



Maka,

Matriks Ruas :

$$\begin{array}{c} 2 \times n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Atau :

$$\begin{array}{c} n \times 2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Adjacency :

$$\begin{array}{c} \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Matriks Incidence :

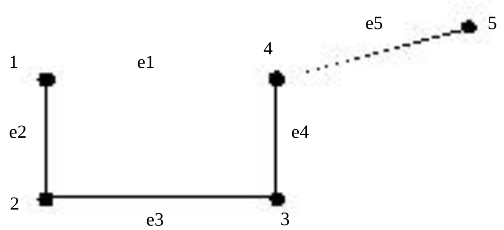
$$\begin{array}{c} \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Matriks Connection

$$\begin{array}{c} \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

<u>HIMPUNAN- POTONG (CUT-SET)</u>

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan ruas yang bila dibuang dari *G*, menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.



Himpunan {e1 , e4} adalah cut-set, juga {e2,e4}, tetapi {e3 , e5} buan, arena {e5} adalah cut-set

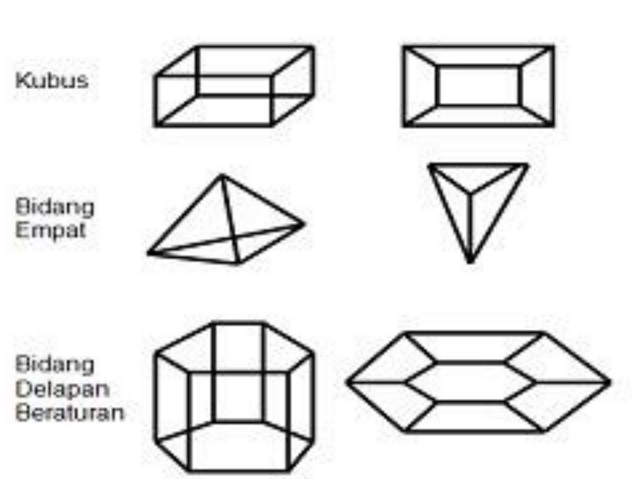
GRAF PLANAR

Sebuah graf dikatakan graf planar bila graf tersebut dapat disajikan (secara geometri) tanpa adanya ruas yang berpotongan. Sebuah graf yang disajikan tanpa adanya ruas yang berpotongan disebut dengan penyajian planar/map/peta.

Contoh :

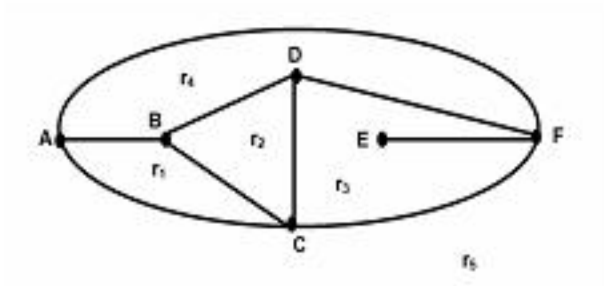
Graf yang termasuk planar antara lain :

- Tree / Pohon
- Kubus
- Bidang Empat
- Bidang Delapan Beraturan



Pada penyajian planar/map, dikenal istilah region. Derajat dari suatu region adalah panjang walk batas region tersebut.

Contoh :



d (r1) = 3

d (r2) = 3

d (r3) = 5

d (r4) = 4

d (r5) = 3

Region dengan batasnya gelung, maka d (r) = 1

Region dengan batasnya ruas sejajar, maka d (r) = 2

FORMULA EULER UNTUK GRAF PLANAR

Untuk Graf Planar berlaku Formula Euler berikut :

$$V - E + R = 2$$

Dimana V = jumlah simpul,

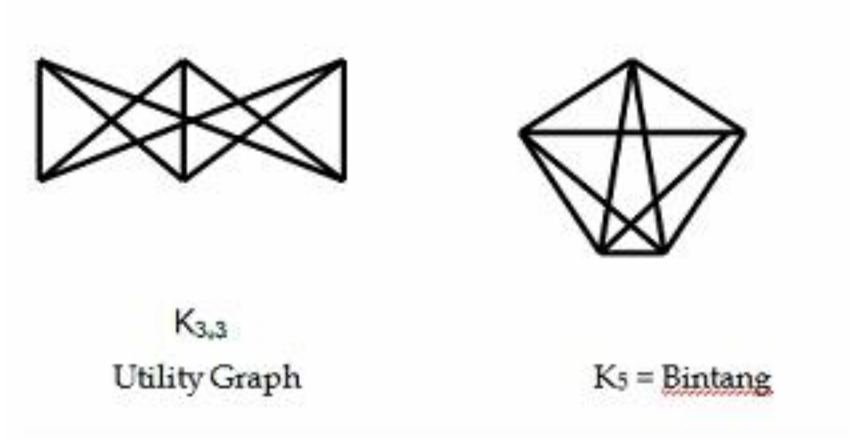
E = jumlah ruas,

R = jumlah region

GRAF NON-PLANAR

Sebuah graf yang tidak dapat disajikan (secara geometri) tanpa adanya ruas yang berpotongan dikenal sebagai graf non planar.

Contoh :



Teorema Kuratowski (1930)

"Suatu graf adalah Non-Planar jika dan hanya jika mengandung subgraf yang Homomorfis ke $K_{3,3}$ atau ke K_5"

PEWARNAAN GRAF

Pewarnaan graf adalah pemberian warna terhadap simpul-simpul graf dimana 2 buah simpul yang berdampingan tidak boleh mempunyai warna yang sama.

G berwarna n artinya graf tersebut menggunakan n warna.

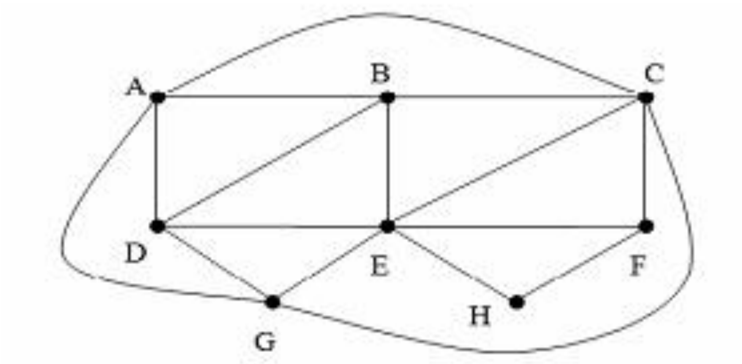
Bilangan kromatis dari G = K(G) adalah jumlah minimum warna yang dibutuhkan.

Algoritma yang dapat digunakan untuk mendapatkan bilangan kromatis dari sebuah graf adalah Algoritma Welch-Powell.

Adapun langkah-langkahnya adalah :

1. Urutkan simpul-simpul berdasarkan derajatnya.
   Dari besar ke kecil.
2. Warnai.

Contoh :



Langkah 1 :

Urutkan vertex berdasarkan derajatnya dari besar ke kecil :

E, C, A, B, D, G, F, H

Langkah 2 :

mewarnai :

Ambil warna ke-1, misalnya hijau untuk E dan A yang tersisa adalah C, B, D, G, F, H

Ambil warna ke-2, misalnya merah untuk C, H, D yang tersisa adalah B, G, F

Warna ke-3 misalnya putih, Selesai.

Sehingga bilangan kromatis graf K(G) di atas adalah 3.

Teorema :

Pernyataan berikut adalah ekivalen :

(1) G berwarna 2

(2) G adalah bipartisi

(3) Setiap sirkuit dalam G mempunyai panjang genap

Graf Lengkap k dengan n simpul membutuhkan n warna

Teorema :

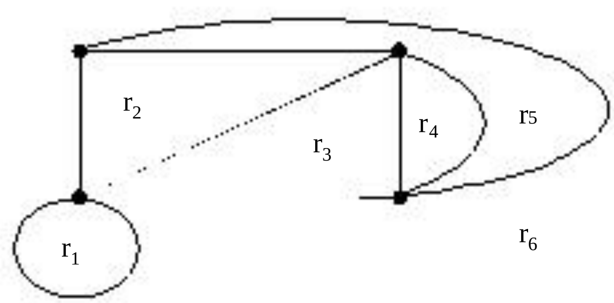
Suatu graf planar G adalah berwarna 5

PEWARNAAN REGION (WILAYAH)

Dua buah region dari sebuah graf bidang dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai sebuah sisi bersama.

Pewarnaan region dari suatu graf planar (graf bidang) *G* adalah suatu pemetaan warna - warna ke region - region dari graf *G* sedemikian sehingga region - region yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Contoh :



$d(r_1) = 1$

$d(r_2) = 3$

$d(r_3) = 3$

$d(r_4) = 2$

$d(r_5) = 3$

$d(r_6) = 4$

Urutkan region :

r_6	r_2	r_3	r_5	r_4	r_1
B	M	P	P	M	M

K(R) = 3

Teorema : Suatu map M adalah berwarna 5

Setiap graf planar adalah berwarna (simpul) 4

Dibuktikan oleh Apple & Haken (1976) - 2000 Graf, jutaan kasus.

PEWARNAAN DUAL

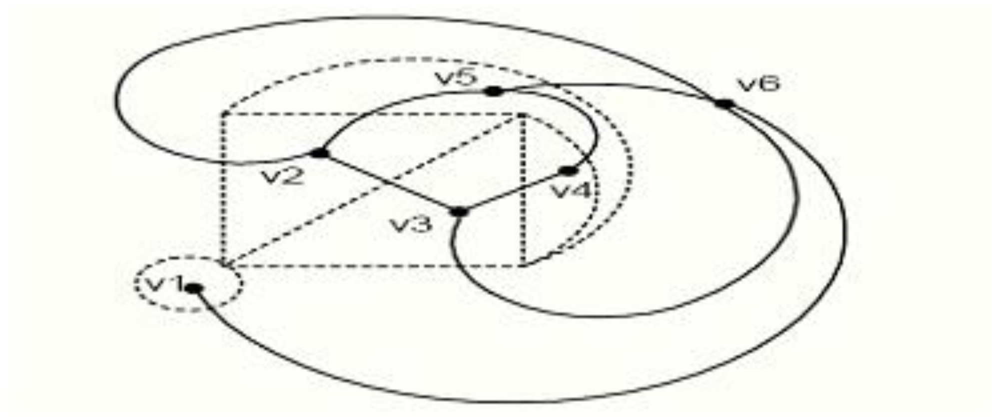
Dari suatu permasalahan pewarnaan region pada graf bidang, bisa kita bawa ke permasalahan pewarnaan simpul dengan membangun sebuah graf dual dari graf bidang tersebut.

Cara membentuk graf dual:

Misal terdapat sebuah graf bidang M. Dalam setiap region dari M, pilih sebuah titik. Jika dua buah region mempunyai sebuah sisi bersama, maka titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut.

Garis-garis ini akan membentuk kurva. Kurva-kurva ini digambarkan sedemikian hingga agar tidak bersilangan. Dengan demikian kurva-kurva tersebut membentuk sebuah graf yang disebut sebagai graf dual dari M.

Contoh :



$d(V_1) = 1$

$d(V_2) = 3$

$d(V_3) = 3$

$d(V_4) = 2$

$d(V_5) = 3$

$d(V_6) = 4$

Urutkan region :

V_6	V_2	V_3	V_5	V_4	V_1
B	M	P	P	M	M

K(M*) = 3