



**2**

***PERMODELAN***

---

---

Salah satu hal yang sangat penting dan banyak memberikan bantuan dalam bidang riset operasional adalah model. Suatu model adalah suatu penyajian sederhana dari suatu keadaan nyata. Grafik, rumus, bagan dan juga gambar adalah contoh-contoh bentuk model.

Model memainkan suatu peranan penting dalam bidang riset operasional. Rumus-rumus dan persamaan-persamaan biasa digunakan untuk menyajikan beberapa proses dan operasi tertentu guna mendiskripsikannya untuk tujuan analisis. Model “matematis” ini digunakan untuk membentuk fungsi-fungsi yang dapat digunakan untuk memprakirakan keadaan proses produksi dimasa datang, atau menjelaskan bagaimana biaya produksi berubah dengan berubahnya tingkat produksi.

Model selain rumus dan persamaan terkadang juga digunakan dalam bidang riset operasional. Model-model ini berhubungan dengan bidang industrial engineering.

Berikut ini yang akan dibahas hanya terbatas pada model yang berbentuk persamaan.

## **A. BENTUK-BENTUK MODEL**

---

Ada beberapa macam cara yang digunakan untuk mengklasifikasikan model. Salah satu cara yang umum digunakan adalah membedakannya ke dalam tiga jenis model yaitu: (1) model ikonik, (2) model analog, dan (3) model simbolis. Berikut ini akan dijelaskan satu persatu.

### **1. Model Ikonik**

Model ikonik adalah suatu model yang digunakan atau mengandung karakteristik dan properti nyata dari suatu sistem yang dimodelkan. Beberapa model mempunyai bentuk dan penampakan sebagaimana sistem yang sebenarnya, tetapi biasanya dalam ukuran yang berbeda. Salah satu contoh dari bentuk model ikonik adalah bentuk pilot plant dari suatu pabrik.

### **2. Model Analog**

Model analog adalah suatu model yang menyajikan suatu analogi dari keadaan nyata. Tidak seperti model ikonik, model analog tidak harus sama dengan sistem yang disajikan. Salah satu contoh model analog adalah histogram dimana panjang

---

batang yang berbeda digunakan untuk menyajikan frekuensi relatif dari beberapa macam kejadian.

### 3. Model Simbolik

Model simbolik menggunakan huruf, angka, dan simbol-simbol yang lain untuk menyajikan karakteristik dan properti dari suatu sistem yang dimodelkan. Beberapa contoh model simbolik adalah persamaan, bagan, kalimat-kalimat tertulis.

Model simbolik adalah bentuk model yang paling abstrak dan yang biasa digunakan dalam bidang riset operasional. dan pada kenyataannya, riset operasional biasanya disinonimkan dengan suatu formulasi dan menggunakan suatu bentuk khusus dari model simbolik yang disebut dengan model matematis. Model Matematis melibatkan penggunaan simbol-simbol berupa huruf, angka, dan operasi matematis; misalnya, "+", "+", "=", dan ">". Simbol-simbol ini digunakan untuk menyajikan suatu ekspresi matematis. Contohnya,  $F = M * A$  adalah suatu model matematis yang menyajikan suatu hubungan antara gaya yang dikeluarkan oleh tubuh dalam melakukan suatu gerak (disimbolkan oleh F), massa tubuh (disimbolkan oleh M), dan percepatannya (disimbolkan oleh A).

### 4. Model Matematis

Ada dua bentuk model matematis yang biasa digunakan dalam bidang riset operasional, yaitu model matematis deskriptif dan model matematis normatif.

#### a. Model Matematis Deskriptif.

Model matematis deskriptif adalah suatu model matematis yang mendiskripsikan beberapa aspek dari sistem yang dimodelkan, seperti keadaan pada masa datang atau karakteristik operasi. Persamaan adalah ilustrasi yang biasa digunakan dalam model matematis deskriptif. Contohnya,  $d_t = a + b_t$  adalah suatu model yang menggambarkan bagaimana permintaan berubah seiring dengan berubahnya waktu. Model tersebut menunjukkan bahwa permintaan pada periode t, yang disimbolkan oleh  $d_t$ , adalah suatu nilai konstanta a ditambah suatu perubahan yang langsung berbanding lurus dengan jumlah periode waktu.

#### b. Model Matematis Normatif

Model matematis normatif dalam bidang riset operasional biasa disebut dengan model dengan masalah pengambilan keputusan (decision problem model). Masalah pengambilan keputusan adalah masalah-masalah yang harus diputuskan oleh satu atau lebih pembuat keputusan (decision makers). Contohnya, dalam

---

mendisain tata-letak (layout) sebuah bank, pihak manajemen bank harus memutuskan beberapa fasilitas "drive in teller" yang harus dipasang. Dalam membuat keputusan ini, pihak manajemen harus mempertimbangkan beberapa tujuan yang ingin dicapai, seperti meminimalkan rata-rata waktu tunggu konsumen (customer) yang menggunakan fasilitas "drive in". Namun demikian, pihak manajemen mungkin juga dibatasi oleh sumber daya yang terbatas, seperti anggaran biaya yang terbatas, sehingga jumlah fasilitas teller yang ideal tidak dapat dipenuhi.

Adapun beberapa komponen dasar yang terdapat dalam setiap model masalah pengembalian keputusan. Komponen-komponen tersebut adalah, (1) peubah keputusan, (2) fungsi tujuan (obyektif), (3) kendala (pembatas), (4) hubungan fungsional, dan (5) parameter-parameter. Peubah keputusan adalah peubah yang ingin dicari nilainya. Dalam contoh teller bank tadi, peubah keputusannya adalah jumlah fasilitas "drive in teller" yang akan dibangun.

Fungsi tujuan (fungsi obyektif) adalah suatu penyaji (a) kriteria yang mengekspresikan tindakan pengambil keputusan dalam mengevaluasi beberapa alternatif nilai dari peubah keputusan, (b) bagaimana kriteria tersebut harus dioptimisasikan. Contohnya, fungsi tujuan pada masalah teller tadi adalah meminimumkan rata-rata waktu tunggu konsumen, dengan minimasi sebagai operator optimisasinya. Hal ini berarti bahwa pihak pengambil keputusan di bank tersebut merasa bahwa disain tata-letak yang baik adalah yang dapat menekan serendah mungkin rata-rata waktu tunggu konsumen.

Kendala adalah batasan-batasan nilai dimana peubah keputusan dapat ditugaskan. Batasan-batasan ini dapat meningkat karena berbagai alasan. Misalnya, dalam masalah teller tadi, keterbatasan anggaran biaya membatasi jumlah maksimum fasilitas teller yang dapat dibangun. Keterbatasan tempat juga dapat membatasi jumlah fasilitas teller yang mungkin dapat dibangun. Jadi di sini ada dua pembatas terhadap peubah keputusan, yaitu keterbatasan anggaran biaya dan tempat.

Dalam memformulasikan model masalah pengambilan keputusan, fungsi tujuan dan kendala diubah ke dalam bentuk model matematis deskriptif, sehingga hasil akhirnya adalah suatu pernyataan matematis dari suatu masalah pengambilan keputusan. Model deskriptif ini adalah suatu hubungan fungsional yang menghubungkan peubah keputusan dengan kriteria-kriteria yang digunakan pengambil keputusan, dan keterbatasan sumber daya yang ditentukan dalam kendala. Misalnya, untuk masalah teller di atas, kriteria rata-rata waktu tunggu dapat dibuat dalam bentuk model dengan menggunakan hubungan fungsional berikut.

$$W(x) = \frac{P_0(\alpha/\mu)^x \beta}{\alpha(1-\beta)^2 x!}$$

dimana,

- x = jumlah fasilitas teller (peubah keputusan)
- W(x) = rata-rata waktu tunggu konsumen
- $\alpha$  = tingkat kedatangan konsumen yang diinginkan
- $\mu$  = tingkat pelayanan konsumen yang diinginkan pada fasilitas teller
- $\beta$  =  $\alpha/\mu x$ , dan
- Po = peluang (probabilitas) tidak adanya konsumen yang menunggu atau yang harus dilayani

Komponen yang terakhir dari model masalah pengambilan keputusan adalah beberapa parameter yang terlibat. Parameter adalah suatu konstanta dalam suatu hubungan fungsional. Contohnya, dalam model rata-rata waktu tunggu W(x), parameternya adalah P<sub>0</sub>,  $\beta$ ,  $\alpha$ , dan  $\mu$ .

Parameter dapat berbentuk deterministik maupun probabilistik. Parameter deterministik adalah suatu nilai yang diasumsikan tetap dan pasti. Sedangkan parameter probabilistik adalah suatu nilai yang berupa peubah acak (misalnya, tingkat rata-rata adalah suatu nilai acak).

Model masalah pengambilan keputusan mengekspresikan fungsi tujuan, peubah keputusan dan kendala secara simultan dalam suatu model matematis normatif. Contohnya, model masalah pengambilan keputusan pada masalah teller di atas dapat diformulasikan dalam bentuk berikut.

$$\text{Minimumkan } W(x) \frac{P_0(\alpha/\mu)^x \beta}{\alpha(1-\beta)^2 x!}$$

$$\begin{aligned} \text{dengan kendala : } & C_1 x \leq B \\ & C_2 x \leq F \\ & x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

---

Pada model tersebut,  $C_1$  adalah biaya untuk mengadakan fasilitas teller,  $B$  adalah jumlah uang yang tersedia untuk membangun fasilitas teller,  $C_2$  adalah luas yang dibutuhkan oleh tiap fasilitas, dan  $F$  adalah luas total yang tersedia untuk membangun fasilitas teller.

Masalah pengambilan keputusan yang berbeda akan menggunakan bentuk model yang berbeda pula. Meskipun demikian, bentuk dasar dari setiap model pengambilan keputusan adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &\text{Maksimumkan (minimumkan) } f(x) \\ &\text{dengan kendala : } g_1(x) \leq b_1 \\ &\qquad\qquad\qquad g_2(x) \leq b_2 \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad g_m(x) \leq b_m \end{aligned}$$

dimana  $x$  adalah suatu vektor peubah keputusan ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ );  $f(x)$  adalah kriteria yang harus dioptimisasikan; dan  $g(x) \leq b_i$  adalah kendala ke- $i$ .

## ***B. FORMULASI MODEL***

---

Memformulasikan suatu model melibatkan dua aktivitas dasar, yaitu menentukan model yang akan digunakan dan menentukan nilai parameter-parameter model yang merupakan nilai konstanta-konstanta dalam model matematis deskriptif. Untuk setiap kegiatan permodelan, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan jenis model yang akan digunakan. Setelah mengetahui jenis model yang akan digunakan, baru kemudian dilakukan pengumpulan segala jenis data yang dibutuhkan untuk mengubah model ke dalam bentuk yang dapat digunakan untuk pengambilan keputusan, yaitu dalam bentuk numerik.

Membentuk model lebih sebagai suatu seni daripada suatu kerja ilmiah, sehingga perasaan dan pengalaman merupakan suatu alat utama yang digunakan dalam memformulasikan model, daripada suatu prosedur khusus. Meski demikian, ada beberapa petunjuk yang harus diikuti dalam memformulasikan suatu model. Beberapa petunjuk akan dijelaskan berikut ini.

---

Petunjuk pertama adalah bahwa semua asumsi yang berhubungan dengan model telah dapat dikenali. Misalnya pada suatu model pemrograman linier perlu diasumsikan bahwa hubungan antara variabel keputusan dengan suatu parameter tertentu adalah linier, sehingga dapat digunakan fungsi linier untuk menyelesaikannya.

Petunjuk kedua adalah perlunya validasi keakuratan model. Misalnya, suatu model deskriptif akan dikatakan valid atau akurat bila :

1. mengandung semua tujuan, kendala dan variabel keputusan yang relevan terhadap masalah yang dimodelkan
2. tujuan, kendala dan variabel keputusan yang masuk dalam model adalah relevan terhadap masalahnya.
3. hubungan fungsionalnya valid; model tersebut akurat, yaitu model tersebut menyajikan nilai parameter yang akurat. Misalnya, suatu model diformulasikan untuk masalah penempatan suatu mesin di suatu pabrik dan kriteria tata-letak terhadap keselamatan tidak dimasukkan baik dalam fungsi tujuan maupun kendala; bila pihak manajemen menganggap keselamatan adalah suatu pertimbangan yang cukup penting, maka model tersebut tidak dapat dikatakan valid.

Petunjuk ketiga adalah bahwa secara eksplisit model merepresentasikan suatu *trade-off* antara keakuratan model dengan kegunaannya terhadap pemakai dalam menggambarkan sistem yang diwakilinya.

Petunjuk keempat adalah perlunya diingat bahwa *garbage in garbage out*. Bagaimana akurat dan baiknya model sebelum ditentukan nilai parameternya, bila nilai parameter tersebut tidak berarti, maka model tersebut menjadi tidak berarti pula.

Petunjuk terakhir adalah pembuatan model tersebut sebaiknya merupakan suatu proses iteratif dimana umpan balik terhadap keakuratan dan kegunaan mode awal yang dibuat digunakan untuk memperbaiki formulasi model selanjutnya.

Demikian beberapa petunjuk yang secara garis besar merupakan dasar yang cukup membantu dalam pembuatan suatu model.

---

## SOAL-SOAL LATIHAN

---

1. Seorang petani memelihara babi untuk kemudian dijual di pasar; dan dia ingin menentukan jumlah kebutuhan pakan dari berbagai jenis yang tersedia untuk diberikan ke babi-babinya agar kebutuhan nutrisinya terpenuhi dengan biaya seminimal mungkin. Kandungan nutrisi dari tiap jenis pakan tersebut (per-kg) dapat dilihat pada tabel berikut, termasuk harganya.

| Kandungan nutrisi | Jagung per-hari | Tankage | Alfalfa | Kebut. min |
|-------------------|-----------------|---------|---------|------------|
| Karbohidrat       | 90              | 20      | 40      | 200        |
| Protein           | 30              | 80      | 60      | 180        |
| Vitamin           | 10              | 20      | 60      | 150        |
| Harga (\$)        | 42              | 36      | 30      |            |

Formulasi model matematis untuk masalah tersebut.

2. Farah telah mengembangkan 2 jenis mainan orang dewasa yang dikerjakannya dengan tangan. Mainan-mainan tersebut kemudian dijualnya ke toko-toko di seluruh nusantara. Meskipun permintaan untuk mainan ini melebihi kemampuannya untuk memproduksi, namun Farah terus bekerja sendiri dan membatasi jam kerjanya per-minggu hanya sampai 50 jam. Mainan I membutuhkan waktu 3.5 jam untuk menyelesaikannya, sedangkan mainan II 4 jam. Masing-masing mainan mendatangkan keuntungan \$28 untuk mainan I dan \$31 untuk mainan II. Berapa banyak mainan dari tiap jenis yang harus dihasilkan Farah setiap minggunya, jika ia bertujuan memaksimalkan keuntungan laba totalnya ? (Formulasikan saja model matematisnya).
3. Sebuah pabrik memproduksi 4 jenis produk logam yang berbeda, yang masing-masing harus dilengkapi dengan mesin, dipoles dan dirakit. Rincian persyaratan waktu (dalam jam) untuk tiap-tiap produk adalah sebagai berikut :



| Pemasangan Mesin (Jam) | Pemasangan Mesin (Jam) | Pemolesan (Jam) | Pemolesan (Jam) |
|------------------------|------------------------|-----------------|-----------------|
| Produk I               | 3                      | 1               | 2               |
| Produk II              | 2                      | 1               | 1               |
| Produk III             | 2                      | 2               | 2               |
| Produk IV              | 4                      | 3               | 1               |

Waktu yang tersedia pada perusahaan ini atas dasar kerja mingguan adalah 480 jam untuk pemasangan mesin, 400 jam untuk perakitan. Laba per-satuan dari keempat produk ini adalah berturut-turut \$6, \$4, \$6 dan \$8. Perusahaan ini mempunyai kontrak dengan sebuah distributor untuk menyediakan 50 satuan produk I, 100 satuan gabungan produk II dan III setiap minggu. Melalui pelanggan lainnya, perusahaan ini menjual tiap-tiap minggunya produk I, II dan III sebanyak mungkin satuan yang dapat diproduksi, kecuali produk IV dibatasi hingga maksimum 25 satuan. Berapa banyak satuan dari masing-masing produk yang harus diproduksi perusahaan ini setiap minggu agar semua kewajiban kontraknya terpenuhi dan keuntungan totalnya maksimal ? Anggap bahwa produk yang belum selesai dapat diselesaikan pada minggu berikutnya. (Formulasikan model matematisnya saja).