3 PEMROGRAMAN LINIER

Pemrograman linier berasal dari kata pemrograman dan linier. Pemrograman disini mempunyai arti kata perencanaan, dan linier ini berarti bahwa fungsi-fungsi yang digunakan merupakan fungsi linier.

Secara umum arti dari pemrograman linier adalah suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis yang analisis-analisisnya memakai model matematika, dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah; kemudian dipilih yang terbaik diantaranya dalam rangka menyusun strategi dan langkah-langkah kebijaksanaan lebih lanjut tentang alokasi sumber daya dan dana yang terbatas guna mencapai tujuan dan sasaran yang diinginkan secara optimal.

Contoh dari suatu masalah pemrograman linier dapat dilihat pada Contoh masalah (Metoda Grafik).

Untuk merumuskan suatu masalah kedalam bentuk model pemrograman linier, harus dipenuhi syarat-syarat berikut :

1. Tujuan masalah tersebut harus jelas dan tegas.

   Pada Contoh Masalah, tujuan masalah tersebut jelas, yaitu ingin mendapatkan keuntungan yang maksimal.

2. Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin membandingkan.

   Pada Contoh Masalah, alternatif perbandingannya adalah kombinasi jumlah produksi dan keuntungan yang diperoleh.

3. Adanya sumber daya yang terbatas.

   Pada Contoh Masalah, sumber daya yang terbatas adalah waktu untuk subassembly, assembly dan inspeksi.

4. Bisa dilakukan perumusan kuantitatif.

   Fungsi tujuan dan kendala harus dapat dirumuskan secara kuantitatif.

5. Adanya keterkaitan peubah.

   Adanya hubungan keterkaitan antara peubah-peubah yang membentuk fungsi tujuan dan kendala.

Untuk membentuk suatu model pemrograman linier perlu diterapkan asumsi-asumsi berikut :

1. Linearity

   Fungsi obyektif dan kendala haruslah merupakan fungsi linier dan variabel keputusan. Hal ini akan mengakibatkan fungsi bersifat proporsional dan additif, misalnya untuk memproduksi 1 kursi dibutuhkan waktu 5 jam, maka untuk memproduksi 2 kursi dibutuhkan waktu 10 jam.

2. Divisibility

   Nilai variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan. Apabila diinginkan solusi berupa bilangan bulat (integer), maka harus digunakan metoda untuk integer programming.

3. Nonnegativity

   Nilai variabel keputusan haruslah nonnegatif (≥ 0).

4. Certainty

   Semua konstanta (parameter) yaitu C_j, a_{ij} dan b_i diasumsikan mempunyai nilai yang pasti (sudah tertentu). Bila nilai-nilai parameternya probabalistik, maka harus digunakan formulasi pemrograman masalah stokastik.

Walaupun ada beberapa batasan asumsi yang harus ada, namun pemrograman linier ini dapat digunakan untuk memecahkan masalah-masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas guna mendapatkan hasil yang optimal.

Beberapa metoda digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier ini. Berikut ini akan dibahas dua metoda yang umum digunakan, yaitu metoda grafik dan metoda simpleks.

A. METODA GRAFIK

Tujuan dari metoda grafik ini adalah untuk memberikan dasar-dasar dari konsep yang digunakan dalan teknik SIMPLEKS. Prosedur umumnya adalah untuk mengubah suatu situasi deskriptif kedalam bentuk masalah pemrograman linier dengan menentukan variabelnya-variabelnya, konstanta-konstantanya, fungsi obyektifnya dan batas-batasannya (kendala-kendala), sehingga masalah tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik dan diinterpretasikan solusinya. Untuk menggunakan metoda grafik, dilalui tahapan-tahapan berikut :

1. Indentifikasi variabel keputusan
2. Indentifikasi fungsi obyektif
3. Identifikasi kendala-kendala
4. Menggambarkan bentuk grafik dari semua kendala
5. Indentifikasi daerah solusi yang layak pada grafik
6. Menggambarkan bentuk grafik dari fungsi obyektif dan menentukan titik yang memberikan nilai obyektif optimal pada daerah solusi yang layak.
7. Mengartikan solusi yang diperoleh

CONTOH MASALAH

MultiBand Enterprises adalah suatu perusahaan yang memproduksi dua macam produk, yaitu radio portabel (PR) dan radio citizen band (CB). Manajer pemasaran menyatakan bahwa perusahaan selalu dapat menjual semua produk dihasilkan. Selanjutnya Sang manajer pemasaran ini bertanya kemanajer operasi tentang besarnya kapasitas produksi/bulan. Manajer operasi menyatakan bahwa kapasitas output tergantung produk mana yang diproduksi. Selanjutnya manajer operasi menyatakan bahwa ada 3 jenis pekerjaan dilakukan dalam pembuatan produk radio tersebut, yaitu subbassembly, assembly dan inspeksi. Kedua produk tersebut membutuhkan waktu pengerjaan yang berbeda untuk setiap jenis pekerjaan tadi. Jadi kapasitas produksinya tergantung pada produk mana yang akan diproduksi.

Waktu yang tersedia untuk pekerjaan subassembly setiap bulannya adalah 326 jam, untuk assembly adalah 354 jam dan untuk inspeksi adalah 62 jam. Sedangkan setiap unit radio CB membutuhkan 0.4 jam untuk pekerjaan subassembly, 0.5 jam untuk assembly dan 0.05 jam untuk inspeksi. Radio portabel untuk setiap unitnya membutuhkan waktu 0.5 jam untuk pekerjaan subassembly, 0.3 jam untuk assembly dan 0.1 jam inspeksi. Wakil direktur menyatakan bahwa untuk setiap CB yang terjual diperoleh keuntungan sebesar $50 dan untuk setiap PR didapat $40. Jadi beberapa kapasitas output dari MultiBand setiap bulannya (beberapa Cb dan PR yang harus diproduksi) agar keuntungan yang diperoleh sebesar mungkin ?

LANGKAH PERTAMA

Identifikasi Variabel keputusan

Pada contoh masalah tersebut terlihat ada dua variabel keputusan yaitu radio CB dan Radio PR. Masalahnya adalah untuk menentukan berapa CB. dan PR yang harus diproduksi.

LANGKAH KEDUA

Identifikasi Fungsi Obyektif

Setiap CB memberikan kontribusi keuntungan $50 dan setiap PR memberikan kontribusi keuntungan $40. Jadi total keuntungan MultiBand sebesar

($50) (CB) + ($40) (PR).

Pada fungsi obyektif terlihat bahwa total keuntungan yang diperoleh tergantung pada jumlah CB dan PR yang diproduksi. MultiBand menginginkan keuntungan yang sebesar mungkin; yang berarti MultiBand ingin memaksimumkan keuntungan.

LANGKAH KETIGA

Identifikasi Sumber Daya yang Terbatas

Untuk memproduksi radio, MultiBand membutuhkan tiga jenis pekerjaan yang harus dilakukan yaitu subassembly, assembly dan inspeksi. Jumlah waktu yang tersedia untuk melakukan ketiga jenis pekerjaan tersebut adalah 316 jam untuk subassembly, 354 jam untuk assembly dan 62 jam untuk inspeksi. Produksi sebuah CB membutuhkan 0.4 jam pekerjaan membutuhkan waktu subassembly 0.5 jam, assembly 0.3 jam dan inspeksi 0.1 jam. Jadi, ada tiga jenis sumber daya yang terbatas, dan jumlah CB dan PR yang dapat diproduksi dibatasi oleh ketersediaan jumlah ketiga jenis sumber daya tersebut.

Keterbatasan ketiga sumber daya tersebut di atas dapat diekspresikan ke dalam bentuk pertidaksamaan berikut :

Sumber daya	Konsumsi sb. daya		Ketersediaan
Subassembly	0.4CB + 0.5PR	$\leq$	316
Assembly	0.5CB + 0.3PR	$\leq$	354
Inspeksi	0.05CB + 0.1PR	$\leq$	62

LANGKAH KEEMPAT

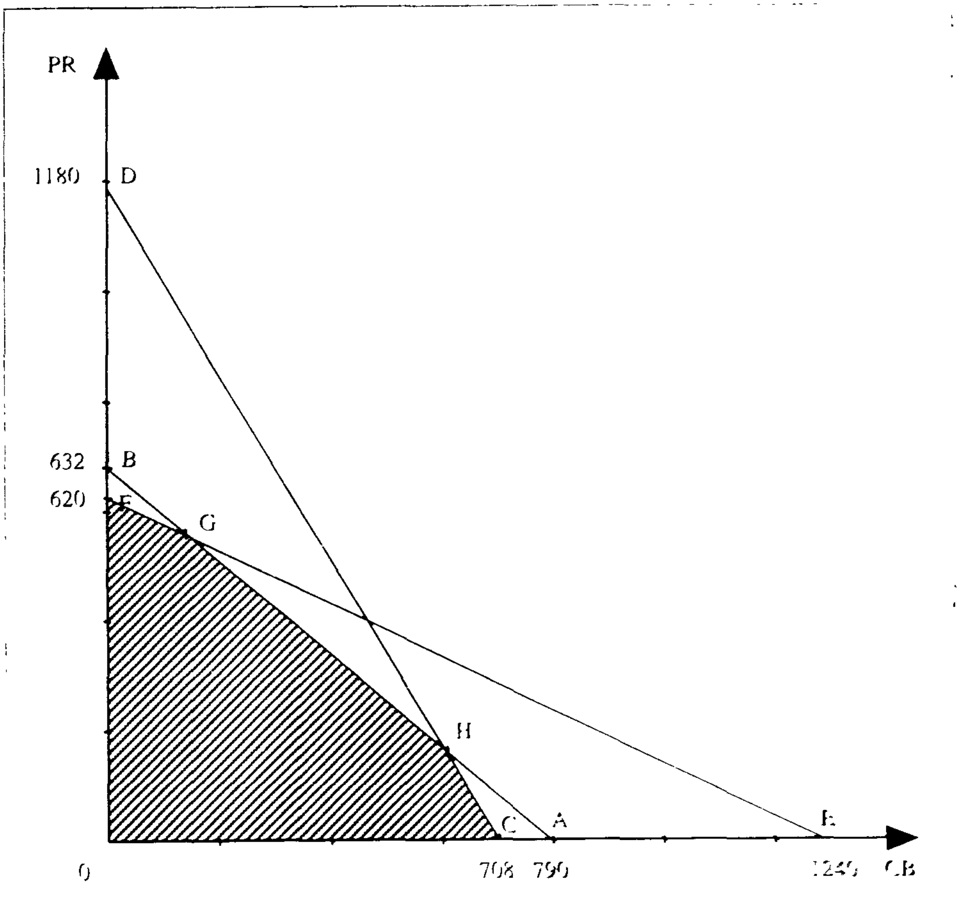
Membuat Grafik dari Semua Batasan (Kendala)

Sumbu-sumbu yang digunakan untuk menggambarkan grafik adalah garis yang mewakili variabel keputusan yang ingin dicari nilainya. Untuk grafik yang kita buat, sumbu horisontal menunjukkan jumlah CB yang dapat diproduksi dan sumbu vertikal menunjukkan jumlah PR yang dapat diproduksi. Daerah solusinya adalah titik-titik pada atau di sebelah kanan sumbu vertikal dan titik-titik pada atau di atas sumbu horizontal, karena nilai negatif untuk PR dan CB tidak memberikan arti. Setiap titik pada daerah solusi mewakili kombinasi jumlah PR dan CB yang diproduksi.

Pertama, dibuat gambar garis untuk kendala subassembly. Bila sejumlah 316 jam pekerjaan subassembly digunakan untuk memproduksi CB, berapa jumlah CB yang dapat diproduksi ? Karena setiap CB membutuhkan 0.4 jam pekerjaan subassembly, maka dalam waktu 316 jam akan dihasilkan CB sejumlah 316 : 0.4 = 790 unit. Kombinasi produksi CB 790 unit dan PR 0 unit ini diplotkan sebagai titik A pada gafik. Alternatif lainnya adalah menggunakan seluruh jam tersebut untuk memproduksi PR. Untuk kasus ini, maka akan dapat diproduksi PR sejumlah 316 : 0.5 = 632 unit. Kombinasi produksi 632 unit PR dan 0 unit CB ini diplotkan sebagai titik B pada grafik. Disebabkan semua batasan tersebut berbentuk pertidaksamaan linier, maka grafik dapat digambarkan sebagai garis yang menghubungkan titik A dan B. Setiap titik pada batasan ini menyajikan kombinasi jumlah CB dan PR yang diproduksi, dan setiap kombinasi tersebut mengkonsumsi semua waktu untuk pekerjaan subassembly yang tersedia. Titik-titik yang berada di atas atau di sebelah kanan garis AB adalah kombinasi tak layak dari CB dan PR, karena dibutuhkan lebih dari 316 jam subassembly untuk memproduksinya.

Dengan cara yang sama dapat digambarkan garis-garis yang lain untuk kedua sumber daya yang terbatas lainnya, yaitu assembly dan inspeksi.

Pada Gambar 3.1., garis CD adalah garis untuk sumber daya assembly dan garis EF adalah garis untuk sumber daya inspeksi.



Gambar 3.1.

LANGKAH KELIMA

Identifikasi Daerah Solusi yang Layak

Dalam memutuskan berapa jumlah PR dan CD yang dapat diproduksi, pihak manajemen tidak dapat hanya menggunakan 1 atau 2 sumber daya yang terbatas saja sebagai bahan pertimbangan, tetapi harus semuanya. Titik-titik yang merupakan titik-titik yang layak yang memenuhi semua keterbatasan sumber daya tersebut berada di daerah bergaris pada Gambar 3.1. Daerah yang layak ini dikelilingi oleh titik-titik pojok (titik ekstrim) O,F,G,H,C.

LANGKAH KEENAM

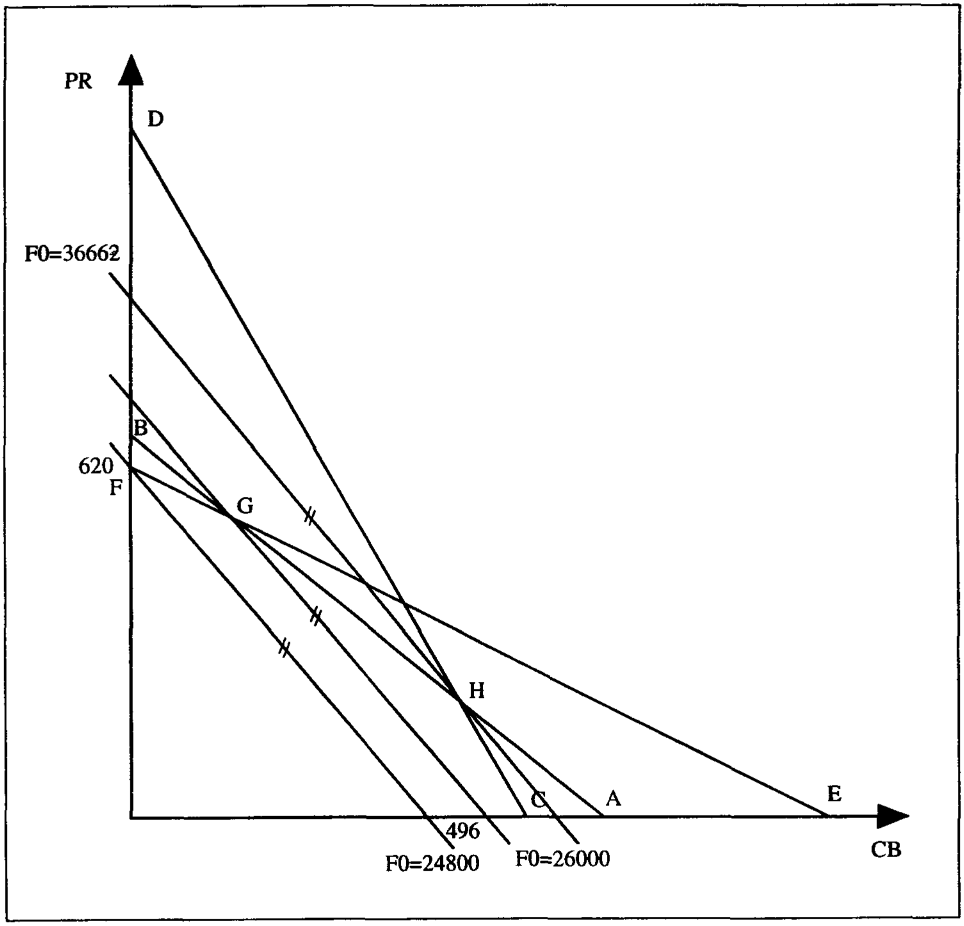
Membuat Grafik Fungsi Obyektif dan Menentukan Titik Optimal

Walaupun semua titik pada daerah bergaris adalah alternatif keputusan yang layak, titik-titik tersebut tidak memberikan total nilai keuntungan yang sama. Beberapa memberikan total nilai keuntungan yang lebih besar dari yang lainnya. Sebagai contoh, pada titik C (708 unit CB dan 0 unit PR) didapatkan total nilai keuntungan sebesar : ($50) (708) + ($40) (0) = $35400.

Sedangkan sejumlah 300 unit CB dan 300 unit PR, yang juga merupakan salah satu alternatif solusi yang layak, hanya memberikan total nilai keuntungan sebesar: (%50) (300) + ($40) (300) = $27000. Jadi, harus dipilih suatu titik yang memberikan nilai keuntungan terbaik (maksimum) di antara titik-titik pada daerah yang layak tersebut. Tugas ini dapat lebih disederhanakan, karena *titik optimal yang dimaksud adalah salah satu dari titik pojok pada daerah layak.* Jadi salah satu dari titik-titik O,F,G,H atau C adalah titik optimal. Kita dapat menghitung total nilai keuntungan untuk setiap titik dari kelima titik tadi dan memilih satu titik yang memberikan nilai tertinggi.

Prosedur penentuan lainnya yang juga dapat digunakan adalah prosedur grafis. Untuk menggunakan prosedur grafis ini perlu ditambahkan satu garis lagi pada grafik tersebut yang merupakan garis yang menunjukkan suatu nilai keuntungan tertentu dari persamaan fungsi obyektif. Pertama, ditentukan terlebih dahulu sembarang nilai total keuntungan (sebaiknya yang menghasilkan nilai variabel keputusan bulat). Lalu digambarkan garis persamaannya dengan cara yang sama seperti penggambaran garis untuk kendala (batasan). Sebaiknya garis yang digambarkan adalah garis fungsi obyektif yang melalui titik pojok daerah layak, dimulai dari titik pojok yang paling kiri. Demikian seterusnya hingga didapat suatu garis yang melalui titik pojok yang memberikan total nilai keuntungan terbesar. Titik pojok yang dilalui oleh garis tersebut adalah titik yang optimal

Pada Gambar 3.2. titik optimalnya adalah titik H.



Gambar 3.2.

LANGKAH KETUJUH

Mengartikan Hasil yang Diperoleh

Hasil dari langkah keenam di atas adalah diperoleh titik optimal yaitu titik H. Koordinat titik tersebut adalah (632.31,126.15); dimana pada grafik tersebut sumbu horizontal menunjukkan jumlah CB dan sumbu vertikal menunjukkan jumlah PR. Jadi agar keuntungan yang diperoleh maksimal, dan karena dibatasi oleh kendala-kendala yang ada, maka MultiBand harus memproduksi radio CB sejumlah 632.31 unit dan radio PR sejumlah 126.15 unit.

Hal lain yang dapat diketahui berdasarkan hasil penyelesaian dengan metoda grafik tersebut adalah tentang ada tidaknya sejumlah tertentu sumber daya yang tidak dipergunakan dalam produksi untuk memperoleh keuntungan maksimal. Pada Gambar 3.2. terlihat bahwa titik optimal terletak pada garis kendala subassembly dan assembly. Hal ini berarti bahwa kedua sumber daya tersebut habis digunakan, karena garis tersebut menunjukkan jumlah maksimum kedua sumber daya yang tersedia. Sekarang coba dilihat letak titik optimal terhadap garis kendala inspeksi. Ternyata titik optimal terletak di sebelah kiri-bawah garis inspeksi. Hal ini berarti ada sejumlah tertentu sumber daya ini yang tidak dipergunakan dalam produksi untuk memperoleh keuntungan maksimal.

Secara aljabar hal-hal tersebut juga dapat diketahui dan juga berapa jumlah sumber daya yang tersisa, dengan cara sebagai berikut :

* Inspeksi

Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	–	Sumber daya yang digunakan
	=	62.0 jam	–	[(0.05 jam/PR) (632.31 CB) + (0.10 jam/PR) (126.15 PR)]
	=	62.0	–	[31.62 + 12.62]
	=	17.76 jam		

* Subassembly

Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	–	Sumber daya yang digunakan

	=	316.0 jam	–	[(0.4 jam/CB) (632.31 CB) + (0.5 jam/PR) (126.15 PR)]
	=	316.0	–	[252.92 + 63.08]
	=	0.0 jam		
* Assembly				
Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	–	Sumber daya yang digunakan
	=	354.0 jam	–	[(0.5 jam/CB) (632.31 CB) (0.30 jam/PR) (126.15 PR)]
	=	354.0	–	[316.16 + 37.84]
	=	0.0 jam		

Jadi, dengan menggunakan metoda grafik dapat ditentukan arti dari koefisien-koefisien dan variabel-variabel yang berbeda, dan bagaimana hubungan interaksi antara fungsi obyektif dan kendala. Dan perlu pula diingat bahwa solusi optimal selalu merupakan suatu titik ekstrim dalam solusi layak.

B. METODA SIMPLEKS

Pada bagian terdahulu telah kita pelajari penyelesaian suatu masalah pemrograman linier dengan menggunakan metoda grafik. Metoda grafik tersebut hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier yang hanya mempunyai 2 variabel, karena untuk pemrograman linier dengan variabel lebih dari 2 akan sulit untuk menggambarkan bentuk grafiknya. Untuk mengatasi kesulitan ini, maka pada tahun 1947 diperkenalkan suatu metoda yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier oleh Goerge B. Dantzig yang dinamakan Metoda SIMPLEKS.

Algoritma simpleks ini adalah suatu prosedur matematis untuk mencari solusi optimal dari suatu masalah pemrograman linier yang didasarkan pada proses iterasi. Jadi pada prinsipnya prosedur ini diawali dengan penentuan suatu solusi awal yang secara terus-menerus diperbaiki hingga diperoleh solusi yang optimal.

Sebelum diselesaikan dengan menggunakan metoda simpleks, maka terlebih dahulu masalah pemrograman linier harus diubah ke dalam bentuk formulasi model pemrograman linier, yang pada umumnya berbentuk maksimisasi, yang telah dibahas pada bagian terdahulu. Setelah berbentuk suatu model formulasi pemrograman linier, maka model tersebut harus diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk baku pemrograman linier. Baru setelah model berada dalam bentuk baku, maka dapat diterapkan prosedur penyelesaian dengan algoritma simpleks.

Mari kita mulai pembahasan kita dengan mengetahui bagaimana ciri-ciri dari bentuk baku suatu model pemrograman linier untuk algoritma simpleks.

Ada tiga ciri utama dari suatu bentuk baku pemrograman linier untuk algoritma simpleks. Ciri pertama adalah semua kendala harus berada dalam bentuk persamaan dengan nilai kanan tidak negatif. Ciri kedua adalah semua variabel tidak yang terlibat tidak dapat bernilai negatif. Dan ciri terakhir adalah fungsi obyektif dapat berupa maksimisasi maupun minimisasi. Untuk memenuhi ciri-ciri tersebut, maka dibuat beberapa peraturan pengubahan bentuk yang tidak memenuhi bentuk baku ke dalam bentuk baku. Berikut akan dibahas satu-persatu peraturan pengubahan ke dalam bentuk baku pemrograman linier.

PENGUBAHAN KE DALAM BENTUK BAKU

Pengubahan Kendala

1. Kendala yang berbentuk pertidaksamaan $\leq$ diubah ke bentuk persamaan dengan menambahkan suatu variabel baru yang disebut dengan variabel slack untuk setiap kendala. Variabel slack ini menyatakan jumlah sumber daya yang tidak digunakan dari kendala sumber daya yang diwakilinya.

   Contoh :

   $3X_1 + 4X_2 \leq 10$ diubah menjadi

   $3X_1 + 4X_2 + S1 = 10$

2. Kendala yang sudah berbentuk persamaan juga perlu diubah ke bentuk baku persaman dengan menambahkan suatu variabel yang disebut dengan variabel artificial. Variabel ini perlu ditambahkan untuk membentuk suatu matriks identitas pada tabel awal simpleks. Pada akhir iterasi (solusi akhir), variabel

artifial ini tidak diperkenankan mempunyai suatu nilai yang tidak sama dengan nol. Apabila variabel artificial mempunyai nilai yang tidak sama dengan nol, maka solusi yang diperoleh dinyatakan sebagai solusi tak layak.

Contoh :

$3X_1 + 4X_2 = 10$ diubah menjadi

$3X_1 + 4X_2 + A_1 = 10$

3. Kendala yang berbentuk pertidaksamaan ≥ diubah ke bentuk persamaan dengan menambahkan variabel surplus (negatif dari variabel slack) dan variabel artificial. Variabel surplus perlu ditambahkan untuk mengubah kendala ke dalam bentuk persamaan. Karena variabel surplus mempunyai koefisien –1, maka perlu ditambahkan pula variabel artificial untuk membentuk suatu matriks identitas pada tabel simplks awal.

   Contoh :

   $3X_1 + 4X_2 \geq 10$ diubah menjadi

   $3X_1 + 4X_2 - S_1 + A_1 = 10$

4. Kendala yang mempunyai nilai kanan bernilai negatif diubah dengan mengalikannya dengan –1.

   Contoh :

   $3X_1 + 4X_2 \geq -10$ diubah menjadi

   $3X_1 - 4X_3 \leq 10 \rightarrow -3X_1 - 4X_2 + S_1 = 10$

Pengubahan Variabel

Variabel yang bernilai tak terbatas (unrestricted) berarti bahwa variabel tersebut dapat bernilai positif maupun negatif. Sedangkan kita tahu, bahwa bentuk baku pemrograman linier untuk simpleks mensyaratkan semua variabel bernilai non-negatif sehingga untuk variabel yang bernilai tak terbatas perlu diubah ke dalam bentuk variabel bernilai non-negatif.

Pengubahan variabel tak terbatas menjadi variabel yang non-negatif dapat dilakukan dengan menjadikan variabel tersebut menjadi selisih dua variabel yang bernilai non-negatif. Untuk lebih jelasnya dapat diperhatikan contoh berikut :

Contoh :

Maksimumkan : $Z = 15X_1 + 20X_2$

terhadap kendala :

$$3X_1 + 4X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 8$$
$$X_1 \geq 0,\ X_2 \text{ tak terbatas}$$

Agar X_2 bernilai non-negatif, maka X_2 digantikan dengan variabel $X_2'-X_2''$, sehingga formulasinya berubah menjadi :

Maksimumkan : $Z = 15X_1 + 20X_2'-20X_2''$

terhadap kendala :

$$3X_1 + 4X_2'-4X_2'' \leq 10$$
$$2X_1 + 5X_2'-5X_2'' \leq 8$$
$$X_1, X_2', X_2'' \geq 0$$

Bentuk baku dari formulasi model di atas adalah sebagai berikut :

Maksimumkan : $Z = 15X_1 + 20X_2' - 20X_2'' + 0S_1 + 0S_2$

terhadap kendala :

$$3X_1 + 4X_2' - 4X_2'' + S_1 = 10$$
$$3X_1 + 5X_2' - 5X_2'' + S_2 = 8$$
$$X_1, X_2', X_2'', S_1, S_2 \geq 0$$

Setelah mengetahui cara pengubahan suatu bentuk formulasi pemrograman linier ke dalam bentuk bakunya, sekarang bahasan dapat kita lanjutkan ke langkah awal penyelesaian dengan metoda simpleks, yaitu pembuatan suatu tabel simpleks awal yang memuat solusi awal dari masalah yang ingin diselesaikan.

BENTUK TABEL SIMPLEKS AWAL

variabel dasar	Z	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}	NK
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0	0	...	0	0
X_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	B_1
X_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	B_2
.	.				.					.
.	.				.					.
.	.				.					.
X_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	B_m

Pada tabel simpleks tersebut terlihat ada kolom yang memuat variabel dasar. Nah, apakah yang dimaksud dengan variabel dasar ini ? Variabel dasar ini merupakan variabel yang merupakan solusi. Pada tabel awal, yang berperan sebagai variabel dasar adalah variabel-variabel tambahan yang bernilai positif, yaitu variabel slack dan variabel artificial.

Berikutnya akan terjadi perubahan variabel yang menjadi variabel dasar dengan adanya leaving variable dan entering variable. Tentang leaving variable dan entering variable ini akan lebih jelas bila telah kita ketahui algoritma simpleks untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier.

ALGORITMA SIMPLEKS

Langkah-langkah dalam algiritma simpleks untuk mencari solusi optimal dari suatu masalah pemrograman linier adalah sebagai berikut :

LANGKAH PERTAMA

Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan kolom kerja (work column). Kolom kerja ditentukan berdasarkan nilai yang paling negatif dari nilai-nilai yang berada pada baris fungsi obyektif (Z) pada tabel simpleks. Variabel yang berada pada kolom kerja ini akan menjadi entering variable menggantikan salah satu variabel dasar sebelumnya. Variabel dasar mana yang akan digantikan oleh entering variable ini ditentukan pada langkah kedua.

LANGKAH KEDUA

Langkah kedua adalah membuat nilai perbandingan antara nilai kanan (NK) dengan nilai pada kolom kerja dari setiap baris, kecuali baris fungsi obyektif. Baris dengan nilai perbandingan yang terkecil akan berperan sebagai baris pivot. Variabel dasar yang berada pada baris pivot akan menjadi leaving variable yang akan digantikan oleh entering variable.

LANGKAH KETIGA

Langkah ketiga adalah langkah pertama dari langkah-langkah perbaikan solusi. Pada langkah ketiga ini dilakukan perubahan nilai pada baris pivot dengan cara membagi setiap elemen dari baris pivot ini dengan nilai pivot elemen. Nilai pivot elemen ini adalah nilai perpotongan antara baris pivot dengan kolom kerja.

LANGKAH KEEMPAT

Langkah keempat adalah merubah variabel dasar, yang berarti entering variable masuk menggantikan leaving variable.

LANGKAH KELIMA

Langkah kelima adalah merubah semua nilai pada baris selain baris pivot dengan cara berikut :

Nilai baru = Nilai lama – (Nilai pada kolom kerja x Nilai baru pada baris pivot).

LANGKAH KEENAM

Langkah keenam adalah memeriksa apakah masih terdapat nilai negatif pada baris fungsi obyektif. Bila ternyata masih ada nilai negatif pada baris tersebut, berarti tabel belum optimal, sehingga perlu dilakukan kembali langkah-langkah penyelesaian di atas hingga diperoleh solusi yang optimal.

CONTOH PENYELESAIAN MASALAH

Mari kita kembali bahas contoh masalah pemrograman linier yang diberikan pada bagian terdahulu, yaitu pada metoda grafik. Sekarang kita coba selesaikan masalah tersebut dengan menggunakan metoda simpleks.

LANGKAH PERTAMA

Pembuatan Formulasi Model Matematis

Dengan cara identifikasi seperti pada penyelesaian dengan menggunakan metoda grafik, maka diperoleh bentuk formulasi model matematis sebagai berikut:

Fungsi obyektif :

Maksimumkan $Z = 50\ CB + 40\ PR$

Fungsi kendala :

$0.4\ CB + 0.5\ PR \leq 316$

$0.5\ CB + 0.3\ PR \leq 354$

$0.05\ CB + 0.1\ PR \leq 62$

$CB, PR \geq 0$

LANGKAH KEDUA

Pengubahan Model ke Bentuk Baku

Model matematis yang diperoleh pada langkah pertama belum berada pada bentuk baku yang disyaratkan untuk masuk ke metoda simpleks, sehingga perlu dilakukan pengubahan model tersebut ke dalam bentuk baku.

Berdasarkan syarat bentuk baku yang ditetapkan, maka bentuk baku model tersebut adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } Z = 50\ CB + 40\ PR + 0\ S_1 + 0\ S_2 + 0\ S_3$$

Terhadap kendala :

$$0.4\ CB + 0.5\ PR + S_1 = 316$$
$$0.5\ CB + 0.3\ PR + S_2 = 354$$
$$0.05\ CB + 0.1\ PR + S_3 = 62$$
$$CB, PR, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

LANGKAH KETIGA

Membuat Tabel Awal Simpleks

Berdasarkan bentuk baku model yang diperoleh pada langkah kedua, maka dapat dibuat tabulasi awal simpleks sebagai berikut :

Tabel 3.1. Tabulasi awal simpleks masalah MultiBand

variabel dasar	Z	CB	PR	S1	S2	S3	NK
Z	1	-50	-40	0	0	0	0
S1	0	0.4	0.5	1	0	0	316
S2	0	0.5	0.3	0	1	0	354
S3	0	0.05	0.1	0	0	1	62

Arti solusi yang terdapat pada tabel awal tersebut adalah sumber daya 1 (subassembly) masih terdapat sejumlah 316 jam, sumber daya 2 (assembly) masih terdapat sejumlah 354 jam, dan sumber daya 3 (inspeksi) masih terdapat 62 jam. Terdapatnya sejumlah sumber daya tersebut menimbulkan kerugian \$50 per unit CB yang dapat diproduksi dan \$40 per unit PR yang dapat diproduksi. Sehingga diperlukan langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan metoda simpleks agar sumber daya yang ada tersebut dapat digunakan dengan seoptimal mungkin untuk mendatangkan keuntungan yang maksimal.

LANGKAH KEEMPAT

Penyelesaian dengan Metoda Simpleks

Berdasarkan Tabel 3.1. maka ditentukan kolom kerja yang merupakan nilai negatif terbesar pada baris fungsi obyektif. Penentuan kolom kerja ini bertujuan untuk memproduksi produk yang menimbulkan kerugian terbesar per unitnya bila tidak diproduksi. Atau dengan kata lain, produk tersebut akan mendatangkan keuntungan terbesar per unitnya bila diproduksi. Jadi, yang merupakan kolom kerja pada tabel awal tersebut adalah kolom CB dengan nilai pada baris fungsi obyektif sebesar –50.

Selanjutnya ditentukan baris pivot dengan terlebih dahulu membuat nilai perbandingan antara nilai solusi (NK) dari setiap sumber daya dengan nilai pada kolom kerjanya.

- Sumber daya 1 → 316 : 0.4 = 790
- Sumber daya 2 → 354 : 0.5 = 708
- Sumber daya 3 → 62 : 0.05 = 1240

Nilai-nilai hasil perbandingan tersebut mengartikan jumlah unit CB yang dapat diproduksi dengan menggunakan setiap sumber daya yang tersedia. Jadi yang dipilih adalah baris dengan nilai perbandingan yang terkecil. Hal ini dikarenakan bila dipilih yang terbesar, maka tidak akan terpenuhi sejumlah unit CB yang diinginkan, karena terjadi kekurangan sumber daya tertentu. Sehingga baris pivotnya adalah baris kendala kedua.

Dengan diketahuinya kolom kerja dan baris pivot, maka dapat diketahui pula nilai pivotnya yang merupakan perpotongan antara keduanya. yaitu 0.5. Selanjutnya kita ubah semua nilai pada baris pivot ini dengan membaginya dengan 0.5. Selain itu kita juga melakukan perubahan variabel dasar dengan memasukkan entering variable CB menggantikan leaving variable S2.

Berikutnya adalah merubah semua nilai selain nilai pada baris pivot dengan menggunakan cara sebagai berikut :

Nilai baru = Nilai lama - (Nilai pada kolom kerja x Nilai baru baris pivot)

Berdasarkan rumus di atas maka nilai baru yang diperoleh untuk tiap baris selain baris pivot adalah sebagai berikut :

Untuk baris 1 (fungsi tujuan) :

	–50	–40	0	0	0	0
–	–50(1	0.6	0	2	0	708)
	0	–10	0	100	0	35400

Untuk baris 2 (S_1)

	0.4	0.5	1	0	0	316
–	0.4(1	0.6	0	2	0	708)
	0 0.26	1	–0.8	0	32.8	

Untuk baris 4 (S_3) :

	0.05	0.1	0	0	1	62
–	0.05(1	0.6	0	2	0	708)
	0 0.07	0	–1	1	26.6	

Sehingga dapat dipeoleh tabel baru sebagai berikut :

Tabel 3.2. Hasil Perbaikan Solusi Awal dengan Simpleks

variabel dasar	Z	CB	PR	S_1	S_2	S_3	NK
Z	1	0	–10	0	100	0	35400
S_1	0	0	0.26	1	–0.8	0	32.8
CB	0	1	0.6	0	2	0	708
S_3	0	0	0.07	0	–1	1	26.6

Pada Tabel terlihat bahwa masih terdapat nilai negatif pada baris fungsi tujuan, sehingga dapat dinyatakan bahwa solusi yang diperoleh belum optimal. Untuk itu perlu dilakukan lagi perbaikan solusi dengan cara-cara yang sama dengan perbaikan solusi pertama, sehingga diperoleh hasil-hasil berikut :

- Kolom kerja adalah kolom PR yaitu kolom dengan nilai negatif terbesar pada baris fungsi tujuan, sebesar –10.
- Baris pivotnya adalah baris S_1, berdasarkan perhitungan berikut :
  - baris S_1 → 32.8 : 0.26 = 126.15
  - baris CB → 708 : 0.6 = 1180
  - baris S_3 → 26.6 : 0.07 = 380
- Nilai pivotnya adalah 0.26, sehingga nilai pada baris pivot berubah menjadi :

CB	PR	S_1	S_2	S_3	NK
0	1	3.85	-3.08	0	126.15

- Berdasarkan hasil perhitungan untuk baris-baris selain baris pivot, maka diperoleh tabel baru sebagai berikut :

Tabel 3.3. Hasil Perbaikan Solusi pada Tabel 3.2.

variabel dasar	Z	CB	PR	S_1	S_2	S_3	NK
Z	1	0	0	38.46	69.33	0	36661.06
PR	0	0	1	3.85	–3.08	0	126.15
CB	0	1	0	–2.31	3.85	0	632.30
S_3	0	0	0	–0.27	0.12	1	17.77

Berdasarkan hasil pada Tabel yang terakhir terlihat bahwa pada baris fungsi tujuan sudah tidak terdapat lagi nilai negatif, sehingga solusi yang diperoleh telah optimal.

Arti dari solusi optimal yang diperoleh tersebut adalah apabila diinginkan hasil yang optimal, maka perusahaan MultiBand harus memproduksi radio CB sejumlah 632.30 unit dan radio PR sejumlah 126.15 unit. Dari sejumlah sumber daya yang tersedia, bila digunakan untuk memproduksi sejumlah produk yang telah disebutkan di atas, ternyata sumber daya subassembly dan assembly habis terpakai, sedangkan sumber daya inspeksi masih tersisa sebesar 17.77 jam. Sedangkan total keuntungan yang akan diperoleh atas produksi kedua jenis radio dalam jumlah tersebut di atas adalah sebesar $36661.06.

PENGGUNAAN BIG M

Big M digunakan bila pada kendala ditemui penggunaan pertidaksamaan $\geq$ atau =, atau dengan kata lain, ditemui penggunaan variabel artificial. Pada fungsi tujuan, variabel artificial diberi suatu koefisien berupa konstanta M yang berarti bilangan yang sangat besar. Konstanta M ini diberikan agar pada solusi optimal tidak terdapat lagi variabel artificial, sehingga solusi yang dipeoleh layak. Untuk lebih jelasnya coba perhatikan contoh berikut.

Contoh :

Minimumkan $Z = -3X_1 + X_2 + X_3$

terhadap kendala :

$$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 11$$
$$-4X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 3$$
$$2X_1 - X_3 = -1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

maka bentuk bakunya sebagai berikut :

Minimumkan $Z = -3X_1 + X_2 + X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$

terhadap kendala :

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 = 11$$
$$4X_1 + X_2 + 2X_3 - S_2 + A_1 = 3$$
$$2X_1 - X_3 + A_2 = -1$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

Untuk memasukkan data-data tersebut ke dalam tabel simpleks, tidak dapat langsung dilakukan pemasukan nilai-nilai koefisien dari setiap variabel pada fungsi tujuan. Jadi untuk baris tujuan sebelum masuk ke tabel awal simpleks perlu dilakukan perubahan nilai-nilai koefisiennya. Perubahan nilai tersebut didasarkan pada rumus perhitungan berikut :

$$c_j = (V)(VJ) - C_j$$

dimana :

c_j : koefisien baru untuk variabel j pada fungsi tujuan
V : vektor baris koefisien variabel basis pada fungsi tujuan
V_j : vektor kolom koefisien variabel j pada kendala
C_j : koefisien variabel j pada fungsi tujuan

Contoh berikut akan membahas bagaimana mengubah koefisien fungsi tujuan pada contoh di atas untuk masuk ke tabel simpleks awal.

Contoh :

Minimumkan $Z = -3X_1+X_2+X_3+0S_2+MA_1+MA_2$

terhadap kendala :

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 = 11$$
$$4X_1 + x_2 + 2X_3 - S_2 + A_1 = 3$$
$$2X_1 - X_3 + A_2 = -1$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

Untuk masuk ke tabel simpleks awal, maka koefisien fungsi tujuan berubah menjadi :

$$c_{X1} = [0 \;\; M \;\; M] \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{vmatrix} -(-3) = -6M+3$$

$$c_{X2} = [0 \;\; M \;\; M] \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - 1 = M-1$$

$$c_{X3} = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right| - 1 = 3M-1$$

$$c_{S1} = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| - 0 = 0$$

$$c_{S2} = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right| - 0 = -M$$

$$c_{A1} = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right| - M = 0$$

$$C_{A2} = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| - M = 0$$

$$NK = [0 \quad M \quad M] \left| \begin{matrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right| - 0 = 4M$$

Sehingga tabel simpleks awalnya sebagai berikut :

variabel dasar	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	NK
Z	1	–6M+3	M–1	3M–1	0	M	0	0	4M
S_1	0	1	–2	1	1	0	0	0	11
A_1	0	–4	1	2	0	–1	1	0	3
A_2	0	–2	0	1	0	0	0	1	1

MINIMISASI

Dasar perhitungan untuk menyelesaikan masalah minimisasi dengan menggunakan metoda simpleks sama dengan dasar penyelesaian masalah masimisasi yang telah dibahas di atas. Hanya saja untuk pemilihan kolom kerja berarti yang dipilih adalah kolom yang mempunyai nilai positif terbesar pada baris fungsi tujuan; dan selama masih ada nilai positif pada baris tersebut, maka solusi belum optimal.

Cara lain untuk menyelesaikan masalah minimisasi adalah dengan mengubahnya menjadi masalah maksimisasi dengan mengalihkan fungsi obyektifnya dengan -1. Langkah-langkah penyelesaian selanjutnya sama dengan masalah maksimisasi.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah perusahaan bakery memproduksi 2 jenis roti yang berbeda yaitu roti A dan roti B. Bahan baku utama kedua roti tersebut sama, yaitu tepung terigu, gula dan mantega. Roti A membutuhkan 50 gram tepung terigu, 25 gram gula dan 10 gram metega untuk setiap potongnya. Sedangkan Roti B membutuhkan 60 gram tepung terigu, 20 gram gula dan 12 gram mentega. Diasumsikan permintaan konsumen sesuai dengan jumlah produksi; tentukan jumlah roti A dan roti B yang harus diproduksi untuk memdapatkan keuntungan yang maksimal, bila :
   — harga jual roti A Rp 700 per potong
   — harga jual roti B Rp 600 per potong
   — tepung terigu yang tersedia 10 kg
   — gula pasir yang tersedia 4 kg
   — mentega yang tersedia 2 kg

2. PT. Mega-Mega adalah produsen kue-kue ringan yang memproduksi enam macam kue yang ingin mengetahui berapa sebaiknya jumlah setiap jenis kue yang harus diproduksinya setiap minggu untuk memperoleh keuntungan yang maksimal. Kue-kue yang diproduksi adalah *chocolate chip (cc), chocolate ring (cr), chcolate chashew (ccw), moonlight kuning (mk) dan moonlight coklat (mc).* Keuntungan yang diperoleh dari penjualan masing-masing kue tersebut berbeda, yaitu cc Rp 1000, cr Rp 1100, ccw Rp 1000, mk Rp 800, mc Rp 800 per kilogramnya. Kebutuhan bahan baku dari masing-masing kue tersebut seperti tersaji pada tabel berikut :

Produk	cc	cr	ccw	mk	mc
Tepung terigu	600	600	600	600	600
Baking powder	50	35	50	60	60
Telor	1000	500	1000	800	800
Gula	1000	500	1000	800	800
Coklat bubuk	150	150	150	25	15
Coklat chip	400	300	–	–	–

Keterangan :
Data dalam gram

dan persediaan masing-masing bahan baku setiap minggunya adalah sebagai berikut :

- tepung terigu 100 kg
- baking powder 15 kg
- telor 70 kg
- gula 120 kg
- coklat bubuk 60 kg
- coklat chip 10 kg.

3. UD. Awan adalah sebuah industri kecil yang memproduksi komponen alat elektronik yang diperlukan oleh perusahaan-perusahaan elektronik. Manager usaha dagang ini ingin mengetahui berapa jumlah produksi tiap komponen yang dihasilkan setiap bulannya bila diinginkan biaya produksi yang minimal. Komponen-komponen yang diproduksi adalah Hames Assy NR 5 BD, Hames Assy Freezer, Wire Capasitor Assy, Wire Relay Assy, Heater Assy NR B 180 BD, Room Lamp Assy. Sedangkan bahan baku yang diperlukan adalah seperti yang tercantum pada tabel berikut, termasuk persediaan bahan baku per bulan.

Produk	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	Persediaan B. Baku
X_1	74	124					693.000
X_2	74	124	56	28			1.230.000
X_3	8						50.000
X_4	150						30.000
X_5	60						20.000
X_6	150						130.000
X_7		4	8		4	4	60.000
X_8		12			3	4	60.000
X_9			25				75.000
X_{10}					35		200.000

Sedangkan biaya produksi setiap produk yang dihasilkan adalah Hames Assy NR 5 BD Rp 451/satuan, Hames Assy Freezer Rp 673/satuan, Wire Capasitor Assy Rp 181/satuan, Wire Relay Assy Rp 59.3/satuan, Heater Assy NR B 180 BD Rp 160/satuan, Room Lamp Assy Rp 50/satuan.

Keterangan :

I_1 = Hames Assy NR 5 BD
I_2 = Wames Assy Freezer
I_3 = Wire Capasitor Assy
I_4 = Wire Relay Assy
I_5 = Heater Assy NR B 180 BD
I_6 = Room Lamp Assy

X_1 = Kabel Putih 0.75 Cm
X_2 = Kabel Abu-abu 0.75 Cm
X_3 = Tape Crape
X_4 = Tape Busa
X_5 = Busa
X_6 = Kabel Hitam 0.75 Cm
X_7 = Slang
X_8 = Tape Vinyl