4 DUALITAS

Setiap masalah pemrograman linier mempunyai hubungan dengan bentuk masalah pemrograman linier lainnya yang disebut sebagai bentuk DUAL-nya. Hubungan antara masalah dual dengan masalah aslinya (biasa disebut dengan primal) telah terbukti sangat berguna dalam banyak hal. Untuk lebih mengerti, berikut akan diuraikan tentang bentuk dual dan kegunaannya.

BENTUK DUAL

Secara umum apabila masalah pemrograman linier primal dinyatakan dalam bentuk baku berikut :

Maksimumkan $Z = \sum C_j X_j$

Terhadap kendala :

$\sum a_{ij} X \leq b_i$, untuk $i = 1,2, \dots , m$

dan

$X_j \geq 0$, untuk $j = 1,2, \dots , n$

maka bentuk baku dualnya adalah sebagai berikut :

Minimumkan $W = \sum b_i Y_i$

Terhadap kendala :

$\sum a_{ij} Y_i \geq C_j$, untuk $j = 1,2, \dots , n$

dan

$Y_i \geq 0$, untuk $i = 1,2, \dots , m$

Jadi, masalah dual menggunakan parameter-parameter yang sama dengan bentuk primal.

Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. dapat lebih menjelaskan lagi hal-hal berikut :

1. Bagaimana parameter pada suatu kendala masalah yang satu merupakan koefisien satu variabel masalah yang lainnya.

2. Bagaimana koefisien pada fungsi obyektif masalah yang satu merupakan nilai kanan masalah yang lainnya.

Tabel 4.1. Hubungan Primal-Dual Bentuk Baku

			PRIMAL					
			Koefisien dari				NK	
			$.X_1$	X_2	. . .	x_n		
DUAL	Koefisien dari	Y_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	$\leq b_1$	Koefisien untuk F. Obyektif (minimisasi)
		Y_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	$\leq b_2$	
		.			.		.	
		.			.		.	
		.			.		.	
		Y_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	$\leq b_m$	
			V/	V/	. . .	V/		
			C_1	C_2		C_m		
			Koefisien untuk F. Obyektif (maksimisasi)					

Tabel 4.2. Hubungan Primal-Dual

Problem satu	Problem lainnya
Kendala satu	Variabel i
F. obyektif	Nilai kanan

Berdasarkan hubungan yang disarikan dalam Tabel 4.1 dan Tabel 4.2, mari kita coba bahas contoh berikut ini :

Contoh :

Ubah bentuk primal berikut ini ke dalam bentuk dual.

Maksimumkan $Z = 6X_1 + 8X_2$

terhadap kendala :

$$3X_1 + 8X_2 \leq 4$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 7$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dari bentuk primal di atas akan diperoleh bentuk dual seperti berikut :

Minimumkan $W = 4Y_1 + 7Y_2$

terhadap kendala :

$$3Y_1 + 5Y_2 \geq 6$$
$$Y_1 + 2Y_2 \geq 8$$
$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

PROPERTY HUBUNGAN PRIMAL-DUAL

WEAK DUALITY PROPERTY

Jika X adalah suatu solusi layak masalah primal dan Y adalah suatu solusi layak masalah dual, maka :

$$cX \leq Yb.$$

STRONG DUALITY PROPERTY

Jika X* adalah suatu solusi optimal masalah primal dan Y* adalah suatu solusi optimal masalah dual, maka :

$$cX^* = Y^*b.$$

COMPLEMENTARY SOLUTIONS PROPERTY

Pada setiap iterasi, metoda simpleks secara simultas mengidentifikasi suatu titik ekstrim solusi layak X untuk masalah primal dan suatu solusi komplemen (complementary solution) Y untuk masalah dual, dimana :

$$cX = Yb.$$

Jika X bukan solusi optimal masalah primal, maka Y bukan solusi layak masalah dual.

COMPLEMENTARY OPTIMAL SOLUTIONS PROPERTY

Pada iterasi terakhir, metoda simpleks secara simultan mengidentifikasi suatu solusi optimal X^* untuk masalah primal dan suatu solusi komplemen optimal (complementary optimal solution) Y^* untuk masalah dual, dimana :

$$cX^* = Y^*b.$$

Y_i^* adalah shadow price bagi masalah primal.

SYMMETRY PROPERTY

Umum setiap masalah primal dan bentuk masalah dualnya, semua hubungan antara mereka haruslah simetris karena bentuk dual dari masalah dual adalah masalah primalnya.

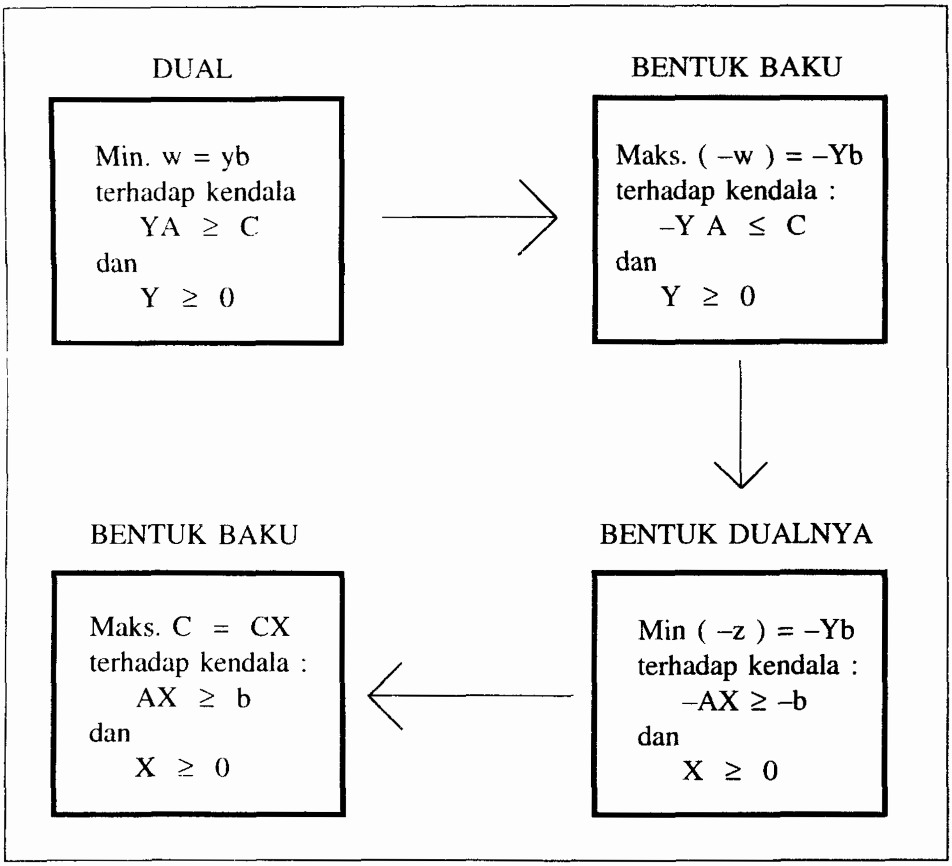
PENGUBAHAN BENTUK PRIMAL-DUAL TAK-BAKU

Tabel 4.3 berikut ini menunjukkan cara pengubahan model pemrograman linier tak-baku ke bentuk baku.

Tabel 4.3. Pengubahan Bentuk Tak-Baku ke Bentuk Baku

Bentuk tak-baku	Bentuk Baku
Minimumkan Z	Maksimumkan (–Z)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$	$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$ dan $-\sum_{j>1}^{n} a_{ij} X_j \leq -b_i$
X_j tak terbatas	$(X'_j - X''_j)$; $X_j', X_j'' \geq 0$

Dasar symmetry property dapat digunakan dalam pengubahan bentuk primal-dual ini, seperti yang dibuktikan pada contoh pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Pengubahan dari Bentuk Tak-Baku ke Bentuk Baku

Hasil pengubahan pada Gambar 4.1. tersebut adalah suatu bentuk primal, yang berarti bahwa dual dari suatu bentuk dual adalah bentuk primalnya. Jadi untuk suatu model tidak menjadi masalah mana yang merupakan bentuk primalnya dan mana yang merupakan bentuk dualnya. Perjanjian yang biasa berlaku adalah model yang disebutkan terlebih dahulu merupakan model bentuk primalnya.

Sekarang coba kita bahas pengubahan bentuk primal ke bentuk dual tak-baku pada contoh berikut ini.

Contoh :

Maksimumkan $Z = 4X_1 + 5X_2$

terhadap kendala :

$$
\begin{aligned}
3X_1 + 2X_2 &\leq 20 \\
4X_1 - 3X_2 &\geq 10 \\
X_1 + X_2 &= 5 \\
X_1 \geq 0,\ X_2 &\text{ tak terbatas.}
\end{aligned}
$$

Apabila ingin mengubah bentuk primal tersebut ke bentuk dual, maka bentuk primal tersebut perlu diubah terlebih dahulu ke bentuk bakunya.

Maksimumkan $Z = 4X_1 + 5X_2' - 5X_2''$

terhadap kendala :

$$
\begin{aligned}
3X_1 + 2X_2' - 2X_2'' &\leq 20 \\
-4X_1 + 3X_2' - 3X_2'' &\leq 10 \\
X_1 + X_2' - X_2'' &\leq 5 \\
-X_1 - X_2' + X_2'' &\leq -5 \\
X_1, X_2', X_2'' &> 0
\end{aligned}
$$

Berdasarkan bentuk baku tersebut diperoleh bentuk dual sebagai berikut :

Minimumkan $W = 20Y_1 - 10\,Y_2 + 5Y_3 - 5Y_4$

terhadap kendala :

$$
\begin{aligned}
3Y_1 - 4Y_2 + Y_3 - Y_4 &\geq 4 \\
2Y_1 - 3Y_2 + Y_3 - Y_4 &\geq 5 \\
2Y_1 - 3Y_2 - Y_3 + Y_4 &\geq -5 \\
Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Bila bentuk dual yang diperoleh di atas dimodifikasi, maka akan diperoleh bentuk berikut :

bila $Y_3 - Y_4 = Y_3'$, kendala ke-3 dikalikan dengan -1 dan kendala ke-2 dan ke-3 digabung, serta nilai koefisien variabel kedua diubah, maka diperoleh :

Minimumkan $W = 20Y_1 + 10Y_2 + 5Y_3'$
terhadap kendala :

$$3Y_1 + 4Y_2 + Y_3' \geq 4$$
$$2Y_1 + 3Y_2 + Y_3' = 5$$
$$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \leq 0,\ Y_3' \text{ tak terbatas}$$

Bila kita perhatikan bentuk perubahan yang dibahas pada contoh, maka sebenarnya kita telah menemukan bentuk umum hubungan primal-dual yang dapat berlaku bagi semua masalah pemrograman linier, baik yang berupa bentuk baku maupun yang tak-baku. Bentuk umum hubungan yang dimaksud dapat dilihat pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4. Hubungan Primal-Dual Secara Umum

PRIMAL	DUAL
A elemen matriks kendala b vektor solusi C koefisien fungsi tujuan kendala ke j persamaan X_j tak terbatas	transpose elemen matriks kendala koefisien fungsi tujuan vektor solusi variabel Y_i tak terbatas kendala ke j persamaan
MAKSIMISASI	MINIMISASI
Kendala ke i $\leq$ Kendala ke i $\geq$ $X_j \geq 0$ $X_j \leq 0$	variabel $Y_i \geq 0$ variabel $Y_i \leq 0$ kendala ke j $\geq$ kendala ke j $\leq$
MINIMISASI	MAKSIMISASI
Kendala ke j $\leq$ Kendala ke j $\geq$ $X_j \geq 0$ $X_j \leq 0$	variabel $Y, \leq 0$ variabel $Y_i \leq 0$ kendala ke j $\leq$ kendala ke j $\geq$

ARTI EKONOMIS DUALITAS

Pada Tabel 4.5. dapat dilihat arti ekonomi dari suatu masalah primal. Berdasarkan arti ekonomi tersebut maka untuk bentuk dualnya juga dapat dijabarkan arti ekonominya.

Tabel 4.5. Arti ekonomi masalah primal.

Jumlah	A r t i
X_j	Tingkat aktivitas j (j=1,2,...,n)
C_j	Satuan keuntungan dari aktivitas j
Z	Total keuntungan dari semua aktivitas
b_i	Jumlah sumber daya i yang tersedia (i=1,2, ...,m)
a_{ij}	Jumlah sumber daya yang dikonsumsi oleh setiap satuan aktivitas j

Y_i — diartikan sebagai sumbangan terhadap nilai keuntungan dari setiap satuan sumber daya ke i bila nilai variabel dasar pada saat itu digunakan untuk memperoleh solusi primal.

$\Sigma\, a_{ij}\, Y_i$ — diartikan sebagai sumbangan terhadap nilai keuntungan pada saat itu dari penggunaan sumber daya-sumber daya yang dikonsumsi bila satu satuan aktivitas j digunakan (j = 1,2,...,n).

$\Sigma\, a_{ij}\, Y_i \geq C_j$ — menyatakan bahwa sumbangan terhadap keuntungan dari campuran penggunaan sumber daya minimal sebesar yang digunakan oleh satu satuan aktivitas j; bila tidak, maka itu bukan penggunaan terbaik dari sumber daya-sumber daya tersebut.

$Y_i \geq 0$ — menyatakan bahwa sumbangan terhadap keuntungan dari sumber daya ke i (i = 1,2,...,m) haruslah non-negatif; bila tidak, lebih baik sama sekali tidak menggunakan sumber daya tersebut.

HUBUNGAN SOLUSI BASIS PRIMAL-DUAL

COMPLEMENTARY BASIC SOLUTIONS PROPERTY

Setiap solusi basis pada masalah primal mempunyai suatu solusi basis komplemen (Complementary basis solution) pada masalah dualnya, dimana nilai fungsi obyektif keduanya sama (Z=W). Hubungan antara solusi basis kedua bentuk tersebut dalam tabel simpleks dapat dilihat pada Tabel 4.6 dan Tabel 4.7.

Tabel 4.6. Hubungan Variabel Primal-Dual

Variabel Primal	Variabel Dual
Variabel asli (X_j)	Variabel Surplus (S_j)
Variabel Slack (X_{n+j})	Variabel asli (Y_i)

Tabel 4.7. Hubungan Solusi Primal-Dual

Interasi ke	Variabel dasar	Koefisien dari										NK
		Z	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}		
Sembarang	Z	1	S_1	S_2	...	S_n	Y_1	Y_2	...	Y_m		Y_o

COMPLEMENTARY SLACKNESS PROPERY

1. Jika suatu variabel primal X_j bernilai positif, maka kendala dual yang berhubungan akan dipenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala dual = 0).
2. Jika suatu kendala primal berupa pertidaksamaan murni pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal > 0), maka variabel dual yang berhubungan Y_i harus sama dengan nol pada keadaan optimum.
3. Jika suatu variabel dual Y_i bernilai positif, maka kendala primal yang berhubungan akan memenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal = 0).
4. Jika suatu kendala dual berupa pertidaksamaan murni (variabel slack atau surplus pada kendala dual > 0), maka variabel primal yang berhubungan X_j harus sama dengan nol pada keadaan optimum.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Ubahlan bentuk primal berikut ini ke bentuk dual.

   a. Maksimumkan $Z = 2X_1 + 7X_2 + 4X_3$
   terhadap kendala :
   $$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$$
   $$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 10$$
   $$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

   b. Maksimumkan $Z = -X_1 - 2X_2 - X_3$
   terhadap kendala :
   $$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 1$$
   $$2X_1 - X_3 \leq 1$$
   $$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

   c. Minimumkan $Z = 3X_1 + 5X_2 - 8X_3$
   terhadap kendala :
   $$X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 1_2$$
   $$X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 7$$
   $$X_1, X_2 \geq 0, X_3 \text{ tak terbatas}$$

2. Berdasarkan tabel optimal berikut, tentukan solusi optimal primal dan solusi optimal dualnya (X_4 dan X_5 adalah variabel slack).

   a.

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	NK
Z	1	8	0	0	3	4	100
X_3	0	3	0	1	1	1	30
X_2	0	5	1	0	1	2	40

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	NK
Z	1	0	1	0	1	1	14
X_1	0	1	–1	0	3	–5	2
X_3	0	0	1	1	–1	2	1

3. Tentukan solusi optimal primal dan dual dari masalah yang mempunyai model matematis berikut.

Maksimumkan $Z = 6X_1 + 8X_2$

terhadap kendala :

$$5X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$