5 MASALAH TRANSPORTASI

Masalah transportasi adalah masalah pemrograman linier khusus yang dapat dikatakan paling penting. Dasar masalah transportasi ini pertama kali dicetuskan oleh Hitchcock dan kemudian dijelaskan dengan lebih mendetail oleh Koopmans. Pendekatan pertama diberikan oleh Kantorovich. Formulasi pemrograman linier dan metoda sistematisnya pertama kali diberikan oleh Dantzig.

Contoh masalah berikut ini adalah masalah transportasi. Perusahaan P dan T adalah perusahaan pengalengan buah pir. Pengalengan buah pir-buah pir tersebut dilakukan di tiga pabrik pengalengan, kemudian dikirimkan dengan menggunakan truk ke empat gudang distribusi. Disebabkan oleh membengkaknya biaya pengiriman, pihak manajemen memulai suatu studi untuk menurunkan biaya pengiriman untuk musim yang akan datang. Suatu prakiraan tentang output dari tiap pabrik telah dibuat, juga prakiraan tentang jumlah yang akan dialokasikan di tiap gudang distribusi. Informasi tersebut, berikut dengan biaya pengiriman per muatan truk untuk tiap kombinasi pabrik-gudang dapat dilihat pada Tabel 5.1. berikut. Jadi, ada total 300 muatan truk yang akan dikirimkan. Masalahnya adalah menentukan penugasan pengiriman pada berbagai kombinasi pabrik-gudang yang akan meminimumkan total biaya pengiriman.

Tabel 5.1. Data biaya pengiriman ($) per muatan truk

Tujuan / Sumber		Gudang				Output
		1	2	3	4	
Pabrik	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Alokasi		80	65	70	85	

Contoh tersebut di atas adalah masalah pemrograman linier, khususnya merupakan masalah pemrograman linier, khususnya merupakan masalah transportasi. Untuk memformulasikan model, dimisalkan Z adalah total biaya pengiriman dan X_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3,4) adalah jumlah muatan-truk yang dikirimkan dari pabrik i ke gudang j. Jadi, tujuannya adalah untuk memilih nilai ke-12 peubah keputusan tersebut (X_{ij}) sedemikian rupa sehingga;

$$
\begin{aligned}
\text{Meminimumkan } Z = {} & 464X_{11} + 513X_{12} + 654X_{13} + 867X_{14} \\
& 352X_{21} + 690X_{23} + 791X_{24} + 995X_{31} \\
& 682X_{32} + 388X_{33} + 685X_{34}
\end{aligned}
$$

dengan kendala :

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} &= 75 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} &= 125 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} &= 100 \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 80 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 65 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 70 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 85
\end{aligned}
$$

$X_{ij} \geq 0$ (i=1,2,3; j=1,2,3,4)

Bila kita lihat model tersebut sebagai masalah pemrograman linier biasa, maka terbayang betapa banyaknya peubah keputusan yang harus dicari nilainya dan terbayang pula langkah-langkah metoda simpleks dan tabel-tabelnya yang harus dilakukan untuk mendapatkan nilai yang dicari. Guna menyederhanakan langkah-langkah perhitungan, berikut ini akan dipelajari metoda khusus untuk menyelesaikan masalah khusus yaitu masalah transportasi.

A. MODEL MASALAH TRANSPORTASI

Masalah transportasi secara umum berhubungan dengan masalah pendistribusian barang dari beberapa kelompok tempat penyediaan yang disebut dengan SUMBER ke beberapa kelompok tempat penerimaan yang disebut dengan TUJUAN, dalam suatu cara tertentu yang dapat meminimumkan total biaya distribusi.

Jadi, secara umum sumber i (i = 1, 2,..., m) mempunyai penawaran sejumlah s_i unit untuk didistribusikan ke sejumlah tempat tujuan, dan tujuan j (j = 1, 2,..., n) mempunyai permintaan sejumlah d_j unit yang dapat diterima dari sejumlah sumber. Asumsi dasarnya adalah biaya distribusi dari sumber i ke tujuan j berbanding lurus dengan jumlah barang yang didistribusikan, dimana c_{ij} adalah biaya distribusi per-unit.

Untuk Z sebagai total biaya distribusi dan x_{ij} (i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n) sebagai jumlah unit barang yang didistribusikan dari sumber i ke tujuan j, formulasi pemrograman linier dari masalah tersebut adalah sebagai berikut.

Minimumkan $Z = \sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ x_{ij}$,

dengan kendala :

$\sum x_{ij} = s_i$, untuk $i = 1,2,...,m$

$\sum x_{ij} = d_j$, untuk $j = 1,2,...,n$

dan $x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j

Tabel 5.2. Bentuk Umum Tabel Transportasi

Biaya pengiriman per unit komoditi

	Tujuan					Penawaran
		1	2	.....	n	
Sumber	1 2 . . m	C_{11} C_{21} C_{m1}		C_{12} C_{22} C_{m2}	C_{1n} C_{2n} C_{mn}	S_1 S_2 S_m
Permint.		d_1	d_2	. . .	d_n	

BEBERAPA PROPERTY MASALAH TRANSPORTASI

1. Property solusi integer (integer solutions property);

   Pada masalah transportasi dimana setiap S_i dan dan d_j mempunyai nilai integer, semua peubah basis dalam setiap solusi layak basis juga mempunyai nilai integer.

2. Property solusi layak (feasible solutions property);

Keadaan yang dibutuhkan oleh suatu masalah transportasi untuk mendapatkan solusi yang layak adalah

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Property kedua mensyaratkan bahwa jumlah penawaran harus sama dengan jumlah permintaan atau sistem dalam keadaan seimbang (balance). Bila dalam suatu kasus jumlah penawaran tidak sama dengan jumlah permintaan, maka ditambahkan sumber atau tujuan fiktif yang disebut dengan sumber dummy atau tujuan dummy.

B. FORMULASI MASALAH TRANSPORTASI

Contoh :

Andaikan Inggris, Perancis dan Spanyol memproduksi semua kebutuhan dunia akan gandum, barley dan oat. Dibutuhkan lahan pertanian 125 juta hektar untuk memproduksi gandum guna memenuhi permintaan dunia. Sedangkan untuk memproduksi barley dibutuhkan lahan seluas 60 juta hektar, dan untuk memproduksi oat dibutuhkan lahan 75 juta hektar. Luas lahan pertanian yang dapat digunakan untuk memproduksi ketiga jenis tanaman pangan tersebut di Inggris, Perancis dan Spanyol berturut-turut adalah 70 juta hektar, 110 juta hektar dan 80 juta hektar. Jumlah jam kerja untuk mengerjakan 1 hektar lahan gandum di Inggris, Perancis dan Spanyol berturut-turut adalah 18, 13 dan 16. Sedangkan untuk mengerjakan 1 hektar lahan barley di butuhkan 15, 12 dan 12 jam kerja; dan untuk mengerjakan 1 hektar lahan oat dibutuhkan 12, 10 dan 16 jam kerja (berturut-turut di Inggris, Perancis dan Spanyol). Upah kerja per jam dalam mengerjakan lahan gandum di Inggris, Perancis dan Spanyol berturut-turut adalah \$3.00, \$2.40 dan \$3.30. Sedangkan untuk mengerjakan lahan barley diberikan upah \$2.70, \$3.00 dan \$2.80 per jam, dan upah untuk mengerjakan lahan oat adalah \$2.30, \$2.50 dan \$2.10 per jam berturut-turut di Inggris, Perancis dan Spanyol.

Masalahnya adalah bagaimana mengalokasikan penggunaan lahan di tiap negara (Inggris, Perancis dan Spanyol) untuk memenuhi kebutuhan pangan dunia dan untuk meminimumkan upah kerja total yang harus dibayarkan.

FORMULASI

Formulasi masalah dapat dibuat dengan pertama-tama melihat tujuan yang ingin dicapai. Dari deskripsi masalah tersebut di atas dapat dilihat bahwa tujuan yang ingin dicapai adalah meminimumkan upah kerja total yang harus dibayarkan dalam rangka memenuhi semua kebutuhan pangan dunia.

Sebagai langkah pertama, mari kita lihat kebutuhan lahan pertanian untuk memenuhi semua kebutuhan pangan dunia. Untuk memproduksi gandum, barley dan oat dibutuhkan lahan pertanian seluas :

(125 + 60 + 75) juta hektar = 260 juta hektar.

Sedangkan luas lahan pertanian yang tersedia untuk memenuhi kebutuhan pangan tersebut ada seluas :

(70 + 110 + 80) juta hektar = 260 juta hektar.

Jadi, jumlah kebutuhan dan ketersediaan lahan pertanian adalah sama besar, atau dengan kata lain masalah tersebut merupakan masalah transportasi yang seimbang, sehingga tidak perlu dilakukan penambahan dummy.

Sekarang kita lihat besarnya kebutuhan biaya (upah kerja) untuk mengerjakan lahan pertanian tersebut sehingga dapat dihasilkan pangan yang dibutuhkan oleh penduduk dunia.

Ketiga jenis tanaman pangan yang dibutuhkan tersebut dapat ditanam di lahan pertanian di tiga negara, yaitu Inggris, Perancis dan Spanyol. Waktu yang diperlukan untuk mengerjakan 1 hektar lahan pertanian untuk tiap jenis tanaman di tiap negara adalah berbeda. Demikian juga dengan upah kerja/jam untuk mengerjakan tiap jenis tanaman di tiap negara. Oleh karena itu perlu dilakukan perhitungan upah kerja/hektar untuk tiap jenis tanaman di tiap negara, agar dapat ditentukan pengalokasian penggunaan tanah di tiap negara dengan upah kerja yang seminimal mungkin.

PERHITUNGAN UPAH KERJA

* Untuk pengerjaan lahan gandum/hektar
- di Inggris : 18 jam x $3.00/jam = $54.00
- di Perancis : 13 jam x $2.40/jam = $31.20
- di Spanyol : 16 jam x $3.30/jam = $52.80

* Untuk pengerjaan lahan barley/hektar
  - di Inggris : 15 jam x $2.70/jam = $40.50
  - di Perancis : 12 jam x $3.00/jam = $36.00
  - di Spanyol : 12 jam x $2.80/jam = $33.60
* Untuk pengerjaan lahan oat/hektar
  - di Inggris : 12 jam x $2.30/jam = $27.60
  - di Perancis: 10 jam x $2.50/jam = $25.00
  - di Spanyol : 16 jam x $2.10/jam = $33.60

Berdasarkan hasil-hasil perhitungan di atas, maka diperoleh tabel transportasi seperti berikut ini. (Tabel 5.3.)

Tabel 5.3. Trabel Transportasi

Ke / Dari	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	54.0	40.5	27.6	70
Perancis	31.2	36.0	25.0	110
Spanyol	52.8	33.6	33.6	80
Demand	125	60	7	260

C. METODA TRANSPORTASI

Metoda transportasi yang biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi adalah suatu hasil modifikasi dari metoda simpleks dengan mem-perhatikan pola khusus dari nilai koefisien pada fungsi pembatasnya. Seperti juga pada metoda simpleks, langkah pertama dalam menyelesaikan masalah transportasi adalah mencari solusi awal yang layak. Kemudian menguji apakah solusi awal tersebut telah optimal, bila belum dilakukan perbaikan-perbaikan yaitu dengan adanya *leaving variable dan entering variable* (perubahan variabel basis dan non basis) hingga diperoleh solusi yang optimal.

SOLUSI AWAL YANG LAYAK

Pada solusi awal yang layak harus dipenuhi kondisi-kondisi berikut :

Jumlah variabel basis = m + n - 1

dengan m SUMBER dan n TUJUAN

Jadi harus ada sejumlah (m + n - 1) variabel yang bernilai nonnegatif.

PROSEDUR UMUM UNTUK MEMPEROLEH SOLUSI AWAL YANG LAYAK

Langkah awal : Semua baris sumber dan kolom tujuan pada tabel transportasi dapat dijadikan variabel basis (daerah pengalokasian = masih kosong).

Langkah 1 : Diantara baris dan kolom yang masih dapat dijadikan variabel basis, pilihlah variabel basis berikutnya berdasarkan pada beberapa kriteria (tergantung pada metoda yang dipergunakan).

Langkah 2 : Pengalokasian dibuat sebanyak mungkin untuk memenuhi nilai penawaran atau permintaan (tergantung yang mana yang terkecil).

Langkah 3 : Menghilangkan baris/kolom yang telah terpenuhi penawaran/ permintaannya dari pengalokasian berikutnya.

Langkah 4 : Bila hanya tersisa satu baris/kolom yang bisa menerima pengalokasian, maka pengalokasian diberikan pada kotak pada baris/kolom tersebut , dan prosedur selesai; selain itu kembali ke langkah 1.

KRITERIA ALTERNATIF UNTUK LANGKAH 1

METODA NORTHWEST CORNER

Pengalokasian dimulai dari pojok barat laut (northwest corner). Selanjutnya pengalokasian dilakukan pada kotak X_{ij+1} bila permintaan ke j telah terpenuhi atau pada kotak X_{i+1j} bila penawaran ke i telah terpenuhi.

METODA LEAST COST

Pengalokasian dimulai pada kotak variabel dengan biaya terendah. Selanjutnya pengalokasian dilakukan pada kotak variabel terendah berikutnya dengan memperhatikan nilai penawaran dan permintaan.

METODA APROKSIMASI VOGEL (VAM)

Untuk setiap baris dan kolom dilakukan perhitungan nilai selisih antara kotak variabel dengan biaya terendah dengan kotak variabel dengan biaya terendah berikutnya (smallest and next to smallest). Kemudian pilih baris/kolom dengan nilai selisih terbesar. Pengalokasian dilakukan pada kotak variabel dengan biaya terendah pada baris/kolom yang terpilih.

METODA APROKSIMASI RUSSELL

Untuk setiap baris ditentukan nilai $\underline{u}_i$ yang merupakan biaya tertinggi pada baris tersebut. Sedangkan untuk setiap kolom ditentukan nilai $\underline{v}_j$ yang merupakan biaya tertinggi pada kolom tersebut. Untuk setiap kotak variabel X_{ij} dilakukan perhitungan nilai $\Delta_{ij} = c_{ij} - \underline{u}_i - \underline{v}_j$. Pengalokasian dilakukan pada kotak variabel dengan nilai Δ_{ij} negatif terbesar.

UJI OPTIMALITAS

METODA STEPPING STONE

Uji Optimalitas : solusi awal yang layak disebut optimal jika dan hanya jika nilai perubahan biaya untuk setiap siklus yang dibuat ≥ 0.

Jadi, pada metoda stepping stone pengujian didasarkan pada hasil perhitungan perubahan biaya dari setiap siklus yang intinya adalah untuk mencoba mengalokasikan pada kotak kosong (variabel non basis). Prinsipnya sama dengan metoda simpleks, yaitu menentukan variabel mana yang akan menjadi *leaving variable* dan mana yang akan menjadi *entering variable*.

Aturan Penentuan Siklus

1. Suatu siklus perubahan pengalokasian tidak boleh mengubah nilai penawaran dan permintaan.
2. Dalam satu siklus hanya boleh terdapat satu kotak kosong (variabel non basis) yang terlibat.
3. Suatu siklus berawal dan berakhir pada kotak yang sama.
4. Hanya boleh ada 2 kotak yang berturutan yang terlibat yang terletak pada baris/kolom yang sama.

METODA MODIFIED DISTRIBUTION (MODI)

Uji Optimalitas : solusi awal yang layak disebut optimal jika dan hanya jika $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$ untuk setiap (i,j) dimana X_{ij}-nya adalah variabel non basis.

Jadi, pada uji optimalitas perlu dilakukan penentuan nilai u_i dan v_j pada solusi yang layak yang diperoleh, kemudian baru dilakukan perhitungan nilai $(c_{ij} - u_i - v_j)$.

Dikarenakan nilai $(c_{ij} - u_i - v_j) = 0$ untuk X_{ij} adalah variabel basis, maka nilai u_i dan v_j dapat ditentukan dengan persamaan berikut :

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

untuk setiap (i,j) dimana X_{ij} adalah variabel basis.

Dikarenakan adanya sejumlah (m + n - 1) variabel basis, maka akan ada sejumlah (m + n - 1) persamaan tersebut di atas. Dan dikarenakan jumlah u_i dan v_j yang tidak diketahui nilainya ada (m + n), maka salah satu variabel tersebut diberi suatu nilai yang tidak mempengaruhi persamaan tersebut di atas. pemberian nilai tersebut dilakukan dengan cara memilih u_i dengan alokasi terbesar dan memberinya nilai nol.

D. CONTOH PENYELESAIAN SUATU MASALAH TRANSPORTASI

Sekarang mari kita coba selesaikan contoh masàlah transportasi di atas dengan menggunakan metoda-metoda transporatasi yang telah kita pelajari.

Pada bagian formulasi telah diperoleh bentuk tabel transportasi dari masalah yang dideskripsikan sebelumnya. Selanjutnya tinggal kita lakukan langkah-langkah penyelesaian untuk mendapatkan solusi yang diinginkan.

LANGKAH PERTAMA

Menentukan solusi awal yang layak merupakan langkah pertama yang harus dilakukan. Untuk mendapatkan solusi awal yang layak ini dapat digunakan beberapa metoda (kriteria), yaitu metoda northwest corner, least cost, VAM dan aproksimasi Russel.

METODA NORTHWEST CORNER

Dengan menggunakan metoda northwest corner, akan diperoleh solusi awal seperti yang terlihat pada Tabel 5.4.

Tabel 5.4. Hasil Penentuan Solusi awal dengan Metoda Northwest Corner

Ke / Dari	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	$\boxed{54.0}$ 70	$\boxed{40.5}$	$\boxed{27.6}$	70
Perancis	$\boxed{31.2}$ 55	$\boxed{36.0}$ 55	$\boxed{25.0}$	110
Spanyol	$\boxed{52.8}$	$\boxed{33.6}$ 5	$\boxed{33.6}$ 75	80
Demand	125	60	75	260

Pengalokasian pada metoda northwest dimulai dari kotak paling kiri atas, yaitu pengalokasian sebanyak mungkin tanpa melanggar batasan yang ada, yaitu jumlah supply dan demandnya. Untuk kotak paling kiri atas pada Tabel 5.4., jumlah supply-nya adalah 70 dan jumlah demand-nya adalah 125. Jadi untuk kotak ini dapat dialokasikan sejumlah 70 (terkecil antara supply dan demand). Selanjutnya kita lihat supply dari Inggris sudah digunakan semua tetapi permintaan untuk produksi gandum belum dipenuhi semua, sehingga pengalokasian berikutnya adalah pada kotak (2,1). Untuk kotak ini, jumlah supplynya adalah 110 dan jumlah demandnya adalah 125 - 70 = 55. Jadi pada kotak ini dapat dialokasikan sejumlah 55. Sekarang terlihat bahwa demand untuk produksi gandum telah terpenuhi semua, tetapi supply yang disediakan oleh Perancis belum semuanya digunakan, sehingga pengalokasian berikutnya adalah pada kotak (2,2). Untuk kotak (2,2) ini besarnya demand adalah 60 dan besarnya supply adalah 110 - 55 = 55. Jadi pada kotak ini dapat dialokasikan sejumlah 55. Ini berarti supply dari Perancis sudah digunakan semua, tetapi demand untuk produksi barley belum semuanya terpenuhi, sehingga pengalokasian berikutnya adalah pada kotak (3,2). Untuk kotak (3,2) disediakan supply sebesar 80 dan mempunyai demand sebesar 60 - 55 = 5. Jadi pada kotak ini dapat dialokasikan sejumlah 5. Sekarang terlihat bahwa supply dari Inggris dan Perancis sudah digunakan semua dan demand untuk produksi gandum dan barley sudah dipenuhi semua. Yang tersisa adalah supply dari Spanyol dan demand untuk produksi oat, sehingga pengalokasian berikutnya adalah pada kotak (3,3). Supply yang tersedia untuk kotak ini sebesar 80 - 5 = 75 dan demand yang diminta sebesar 75, sehingga kita dapat alokasikan sebesar 75. Ini berarti semua supply telah digunakan dan semua demand telah terpenuhi.

METODA LEAST COST

Dengan menggunakan metoda least cost akan diperoleh solusi awal seperti yang terlihat pada Tabel 5.5.

Pengalokasian pada metoda least cost dimulai pada kotak dengan biaya terendah dan dilanjutkan dengan kotak berbiaya terendah selanjutnya yang belum terpenuhi nilai demand dan supply-nya.

Pada contoh masalah yang dibahas, kotak yang mempunyai biaya terendah adalah kotak (2,3) dengan biaya (baca: upah kerja) 25. Untuk kotak ini disediakan supply sebesar 110 dan dibutuhkan demand sebesar 75, sehingga kotak (2,3) mendapat pengalokasian sebesar 75. Kotak dengan biaya terendah berikutnya adalah kotak (1,3). Ternyata kebutuhan lahan untuk produksi oat telah terpenuhi

Tabel 5.5. Hasil Penentuan Solusi awal dengan Metoda Least Cost

Ke / Dari	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	54.0 70	40.5	27.6	70
Perancis	31.2 55	36.0 55	25.0	110
Spanyol	52.8	33.6 5	33.6 75	80
Demand	125	60	75	260

semua, sehingga tidak dapat diberikan alokasi pada kotak (1,3). Selanjutnya kita menuju ke kotak dengan biaya terendah lainnya yaitu kotak (2,1) dengan biaya sebesar 31.2. Untuk kotak (2,1) disediakan supply sebesar 125 dan dibtuhkan demand sebesar 110 -75 = 35, sehingga pada kotak ini mendapatkan pengalokasian sebesar 35. Kotak dengan biaya terendahberikutnya adalah kotak (3,2) dan kotak (3,3) dengan biaya sebesar 33.6. Untuk kotak (3,3) tidak dapat dilakukan pengalokasian, karena kebutuhan lahan untuk produksi oat telah terpenuhi semua. Jadi, kita dapat melakukan pengalokasian ke kotak (3,2) yang mendapatkan supply sebesar 80 dan mempunyai demand sebesar 60, sehingga kotak ini mendapat pengalokasian sebesar 60.

Kotak dengan biaya terendah berikutnya adalah kotak (2,2) dengan biaya sebesar 36.0. Ternyata untuk kotak ini tidak dapat dilakukan pengalokasian, kerena kebutuhan lahan untuk produksi barley telah terpenuhi semua. Hal yang sama juga terjadi pada kotak dengan biaya terendah berikutnya yaitu kotak (1,2). Selanjutnya kita menuju ke kotak (3,1) yang mempunyai biaya sebesar 52.8. Untuk kotak (3,1) disediakan supply sebesar 125 - 35 = 90 dan dibutuhkan demand sebesar 80 - 60 = 20, sehingga kotak ini mendapatkan pengalokasian sebesar 20. Akhirnya kita menuju ke kotak yang terakhir yang dapat menerima pengalokasian yaitu kotak (1,1) dengan biaya sebesar 54. Untuk kotak ini disediakan supply sebesar 70 dan dibutuhkan demand sebesar 125 - 35 - 20 = 70, sehingga kotak (1,1) mendapatkan pengalokasian sebesar 70. Ini berarti semua supply dan demand telah terpenuhi, dan telah selesai pula langkah-langkah untuk mendapatkan solusi awal dengan metoda least cost.

METODA APROKSIMASI VOGEL (VAM)

Dengan menggunakan metoda VAM akan diperoleh solusi awal seperti yang terlihat pada Tabel 5.6.

Pengalokasian dengan menggunakan metoda VAM dimulai dengan menentukan nilai selisih antara kotak dengan biaya terendah dan kotak dengan biaya terendah berikutnya untuk setiap baris dan kolom (selanjutnya kita sebut nilai selisih ini dengan S). Selanjutnya dipilih baris atau kolom dengan nilai S terbesar, dan dilakukan pengalokasian pada kotak dengan biaya terendah pada baris atau kolom yang terpilih.

Tabel 5.6. Hasil Penentuan Solusi awal dengan Metoda VAM

Ke / Dari	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	$\boxed{54.0}$ 15	$\boxed{40.5}$ .55	$\boxed{27.6}$	70
Perancis	$\boxed{31.2}$ 110	$\boxed{36.0}$	$\boxed{25.0}$	110
Spanyol	$\boxed{52.8}$	$\boxed{33.6}$ 5	$\boxed{33.6}$ 75	80
Demand	125	60	75	260

Pada contoh masalah yang dibahas, didapatkan hasil perhitungan nilai S sebagai berikut :

- untuk baris I : biaya terendah pada baris ini adalah 27.6 dan biaya terendah berikutnya adalah 40.5, dan nilai selisih antara keduanya sebesar 40.5 27.6 = 12.9
- untuk baris II : 31.2 - 25 = 6.2
- untuk baris III : 52.8 - 33.6 = 19.2
- untuk kolom I : 52.8 - 31.2 = 21.6
- untuk kolom II : 36.0 - 33.6 = 2.4
- untuk kolom III : 27.6 - 25 = 2.6.

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa yang terpilih untuk pengalokasian pertama adalah kolom I, karena kolom ini mempunyai nilai S terbesar yaitu 21.6. Kotak dengan biaya terendah pada kolom I adalah kotak (2,1), sehingga kotak ini merupakan kotak yang mendapatkan pengalokasian pertama. Untuk kotak ini disediakan supply sebesar 110 dan dibutuhkan demand sebesar 125, sehingga dapat dialokasikan sebesar 110 untuk kotak (2,1).

Untuk pengalokasian kedua perlu dilakukan lagí perhitungan nilai S untuk setiap baris dan kolom. Hasil perhitungan nilai S adalah sebagai berikut :

- untuk baris I : 40.5 - 27.6 = 12.9
- untuk baris II : sudah tidak perlu dilakukan perhitungan lagi, karena sudah terpenuhi supply-nya
- untuk baris III : 52.8 - 33.6 = 19.2
- untuk kolom I : 54 - 52.8 = 1.2, karena baris II sudah tidak masuk ke dalam perhitungan lagi
- untuk kolom II : 40.5 - 33.6 = 6.9
- untuk kolom III : 33.6 - 27.6 = 6.0.

Jadi yang mempunyai nilai S terbesar adalah baris III, yaitu 19.2. Kotak dengan biaya terendah pada baris III adalah kotak (3,2) dan (3,3). Karena ada dua kotak yang mungkin diberi alokasi, kita pilih salah satu secara sembarang, yaitu kotak (3,3). Untuk kotak (3,3) disediakan supply sebesar 80 dan dibutuhkan demand sebesar 75, sehingga kotak ini mendapatkan pengalokasian sebesar 75.

Untuk pengalokasian ketiga dilakukan kembali perhitungan nilai S baru, yang hasilnya adalah sebagai berikut :

- untuk baris I : 54 - 40.5 = 13.5 , karena kolom III tidak masuk lagi dalam perhitungan ini
- untuk baris III : 52.8 - 33.6 = 19.2
- untuk kolom I : 54 - 52.8 = 1.2
- untuk kolom II : 40.5 - 33.6 = 6.9

Jadi yang mempunyai nilai S terbesar adalah baris III yaitu 19.2. Kotak yang berbiaya terendah pada baris III adalah kotak (3,2). Untuk kotak ini tersedia supply sebesar 80 - 75 = 5 dan dibutuhkan demand sebesar 60, sehingga kotak (3,2) mendapat alokasi sebesar 5.

Untuk pengalokasian selanjutnya tidak perlu dilakukan kembali perhitungan nilai S baru, karena tinggal tersisa dua kotak yang masih dapat memperoleh alokasi, yaitu kotak (1,1) dan kotak (1,2). Untuk kotak (1,1) tersedia supply sebesar 70 dan dibuthkan demand sebesar 125 - 110 = 15, sehingga kotak ini mendapatkan pengalokasian sebesar 15. Sedangkan untuk kotak (1,2) tersedia supply sebesar 70 - 15 = 55 dan dibutuhkan demand sebesar 60 - 5 = 55, sehingga kotak ini mendapatkan pengalokasian sebesar 55. Jadi, semua demand dan supply telah terpenuhi yang berarti pencarian solusi awal telah selesai.

METODA APROKSIMASI RUSSEL

Dengan menggunakan metoda aproksimasi Russel akan diperoleh solusi awal seperti yang terlihat pada Tabel 5.7.

Pengalokasian dengan menggunakan metoda aproksimasi Russel dimulai dengan menentukan nilai $\underline{u}_i$ untuk setiap baris yang masih mungkin dilakukan pengalokasian dan nilai $\underline{v}_j$ untuk setiap kolom yang masih mungkin dilakukan pengalokasian. Nilai $\underline{u}_i$ adalah biaya terbesar pada suatu baris dari kotak-kotak yang masih mungkin dilakukan pengalokasian, dan nilai $\underline{v}_j$ adalah biaya terbesar pada suatu kolom dari kotak-kotak yang masih mungkin dilakukan pengalokasian. Kemudian dilakukan perhitungan nilai $\Delta_{ij} = c_{ij} - \underline{u}_i - \underline{v}_j$ untuk setiap kotak yang masih mungkin dilakukan pengalokasian. Selanjutnya dipilih kotak dengan nilai Δ_{ij} negatif terbesar, dan dilakukan pengalokasian terhadap kotak tersebut.

Tabel 5.7. Hasil Penentuan Solusi awal dengan Metoda Metoda Aproksimasi Russel

Dari \ Ke	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	[54.0]	[40.5]	[27.6]	70
Perancis	110 [31.2]	[36.0]	[25.0]	110
Spanyol	15 [52.8]	60 [33.6]	5 [33.6]	80
Demand	125	60	75	260

Berdasarkan data pada contoh masalah yang dibahas, didapatkan hasil perhitungan nilai $\underline{u}_i$, $\underline{v}_j$ dan Δ sebagai berikut :

- $\underline{u}_1 = 54$, karena biaya terbesar pada baris 1 adalah 54
- $\underline{u}_2 = 36$, $\underline{u}_3 = 52.8$
- $\underline{v}_1 = 54$, $\underline{v}_2 = 40.5$, $\underline{v}_3 = 33.6$

sehingga nilai :

- $\Delta_{11} = 54.0 - 54.0 - 54.0 = -54.0$
- $\Delta_{12} = 40.5 - 54.0 - 40.5 = -54.0$
- $\Delta_{13} = 27.6 - 54.0 - 33.6 = -60.0$
- $\Delta_{21} = 31.2 - 36.0 - 54.0 = -58.8$
- $\Delta_{22} = 36.0 - 36.0 - 40.5 = -40.5$
- $\Delta_{23} = 25.0 - 36.0 - 33.6 = -44.6$
- $\Delta_{31} = 52.8 - 54.0 - 52.8 = -54.0$
- $\Delta_{32} = 33.6 - 40.5 - 52.8 = -59.7$
- $\Delta_{33} = 33.6 - 33.6 - 52.8 = -52.8$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa nilai Δ negatif terbesar adalah nilai Δ_{13}, yaitu sebesar -60, sehingga pengalokasian diberikan untuk kotak (1,3). Untuk kotak ini tersedia supply sebesar 70 dan dibutuhkan demand sebesar 75, sehingga kotak (1,3) memperoleh alokasi sebesar 70.

Untuk pengalokasian kedua dilakukan kembali perhitungan nilai $\underline{u}_i$, $\underline{v}_j$ dan Δ_{ij}, dengan hasil sebagai berikut :

- $\underline{u}_2 = 36$, $\underline{u}_3 = 52.8$; baris 1 tidak masuk dalam perhitungan lagi karena supply yang tersedia sudah digunakan semua
- $\underline{v}_1 = 52.8$, $\underline{v}_2 = 36$, $\underline{v}_3 = 33.6$

sehingga nilai :

- $\Delta_{21} = 31.2 - 36.0 - 52.8 = -57.6$
- $\Delta_{22} = 36.0 - 36.0 - 36.0 = -36.0$
- $\Delta_{23} = 25.0 - 36.0 - 33.6 = -44.6$
- $\Delta_{31} = 52.8 - 52.8 - 52.8 = -52.8$
- $\Delta_{32} = 33.6 - 52.8 - 36.0 = -55.2$
- $\Delta_{33} = 33.6 - 33.6 - 52.8 = -52.8$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa nilai Δ negatif terbesar adalah nilai Δ_{21} yaitu sebesar –57.6. Hal ini berarti pengalokasian kedua diberikan pada kotak (2,1) yaitu sebesar 110.

Untuk pengalokasian berikutnya, yang masih mungkin untuk diberi alokasi hanyalah kotak-kotak pada baris ketiga, sehingga tidak perlu lagi dilakukan perhitungan nilai u_i, v_j dan Δ_{ij}. untuk kotak (3,1) dapat diberikan alokasi sebesar 125 – 110 = 15, untuk kotak (3,3) sebesar 75 – 70 = 5 dan untuk kotak (3,2) sebesar 60.

LANGKAH KEDUA

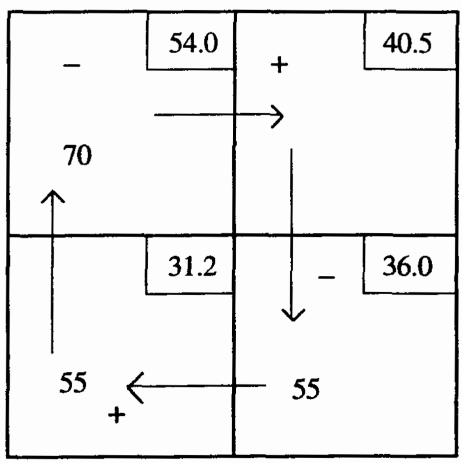
Langkah kedua dalam menyelesaikan masalah transportasi adalah menguji apakah solusi yang diperoleh telah optimal. Untuk pengujian ini dapat digunakan dua jenis metoda yaitu metoda stepping stone dan metoda MODI.

METODA STEPPING STONE

Uji optimalitas dengan metoda stepping stone dilakukan dengan membuat siklus-siklus pengalihan alokasi ke kotak-kotak yang tidak terisi (variabel non basis). Bila setiap siklus yang dibuat tidak ada lagi yang menghasilkan nilai negatif, yang berarti pengalihhan alokasi ke kotak kosong tidak akan menurunkan biaya yang harus dikeluarkan, maka dikatakan solusi telah optimal. Perlu diingat juga, bahwa sebelum masuk ke metoda stepping stone harus diperiksa terlebih dahulu apakah jumlah kotak yang terisi pada penentuan solusi awal telah memenuhi jumlah (m + n – 1). Bila belum maka perlu dilakukan penambahan jumlah kotak yang terisi hingga dipenuhi jumlah tersebut, dengan cara memberikan alokasi sejumlah nol (0) pada kotak yang kosong.

Untuk pengujian optimalitas yang akan dibahas berikut ini, kita gunakan hasil penentuan solusi awal dengan menggunakan metoda northwest corner. Pada Tabel 5.4. dapat kita lihat bahwa jumlah kotak yang terisi telah memenuhi jumlah 3 + 3 – 1 = 5. Hal ini berarti kita dapat langsung membuat siklus pengalihan alokasi ke kotak-kotak kosong. Mari kita bahas setiap siklus satu per-satu.

Siklus pertama yang akan kita buat adalah siklus pengalihan alokasi ke kotak (1,2). Untuk kotak ini dapat dibuat siklus seperti yang terlihat pada Gambar 5.1.

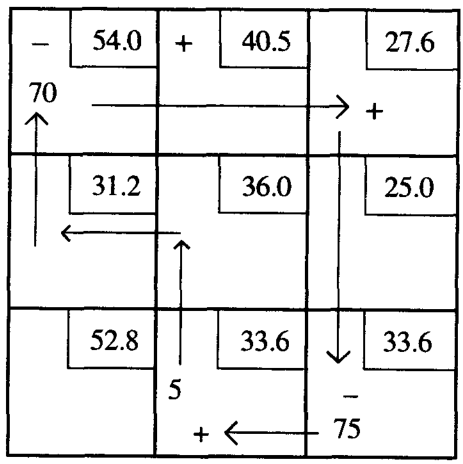


40.5 – 54.0 + 31.2 – 36.0 = – 18.3

Gambar 5.1.

Hasil -18.3 pada siklus tersebut berarti bahwa jika dilakukan pengalihan alokasi ke kotak (1,2), maka biaya yang harus dibayarkan akan berkurang sebesar 18.3 per satuan yang dialihkan.

Siklus yang kedua adalah siklus untuk pengalihan alokasi ke kotak (1,3). Untuk kotak ini dapat dibuat siklus seperti yang terlihat pada Gambar 5.2 .

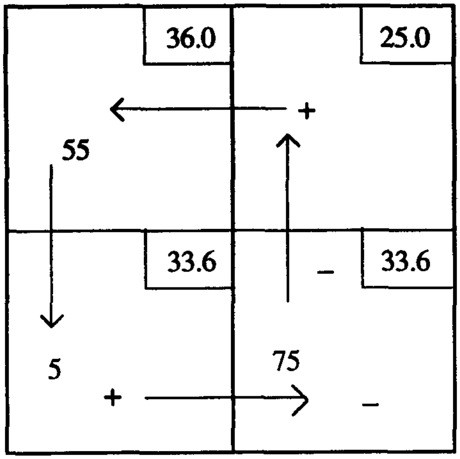


$$27.6 - 33.6 + 33.6 - 36.0 + 31.2 - 54.0 = -31.2$$

Gambar 5.2

Hasil -31.2 pada siklus tersebut berarti bahwa jika dilakukan pengalihan alokasi ke kotak (1,3), maka biaya yang harus dibayarkan akan berkurang sebesar 31.2 per satuan yang dialihkan.

Siklus selanjutnya adalah siklus untuk pengalihan alokasi ke kotak (2,3). Untuk kotak ini dapat dibuat siklus seperti yang terlihat pada Gambar 5.3 .

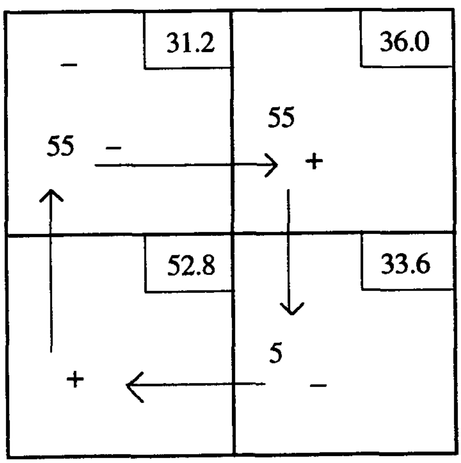


$25.0 - 36.0 + 33.6 - 33.6 = 11.0$

Gambar 5.3.

Hasil -11.0 pada siklus tersebut berarti bahwa jika dilakukan pengalihan alokasi ke kotak (2,3), maka biaya yang harus dibayarkan akan berkurang sebesar 11.0 per satuan yang dialihkan.

Siklus yang terakhir adalah pengalihan alokasi ke kotak (3,1), dengan bentuk siklus seperti yang terlihat pada Gambar 5.4.



$52.8 - 31.2 + 36.0 - 33.6 = 24.0$

Gambar 5.4.

Hasil 24.0 pada siklus tersebut berarti bahwa jika dilakukan pengalihan alokasi ke kotak (3,1), maka biaya yang harus dibayarkan akan bertambah sebesar 24.0 per satuan yang dialihkan.

Berdasarkan hasil siklus-siklus yang dibuat, maka dapat dikatakan bahwa solusi awal belum optimal, karena masih mungkin dilakukan penurunan biaya bila dilakukan pengalihan alokasi ke kotak yang kosong.

METODA MODI

Uji optimalitas dengan metoda MODI dilakukan dengan cara menentukan nilai u_i untuk setiap baris dan nilai v_j untuk setiap kolom, berdasarkan pada rumus berikut :

- untuk kotak yang terisi : $c_{ij} = u_i + v_j$

Untuk pengujian ini kembali kita gunakan hasil solusi awal yang didapatkan dengan menggunakan metoda northwest corner.

Pertama kita cari terlebih dahulu nilai u_i dan v_j untuk setiap baris dan kolom, dengan diawali penentuan nilai $u_i = 0$ pada baris dengan kotak terisi terbanyak. Pada Tabel 5.4. terlihat bahwa baris yang memiliki jumlah kotak terisi terbanyak adalah baris 2 dan 3. Kita pilih salah satu dari kedua baris tersebut secara sembarang, yaitu baris ke 2. Hal ini berarti nilai $u_2 = 0$. Selanjutnya dapat dilakukan perhitungan nilai u_i dan v_j untuk baris dan kolom yang lainnya.

Tabel 5.8. Hasil Penentuan nilai Ui dan vj pada solusi awal (Tabel 5.4.).

$V_1 = 31.2 \quad V_2 = 36.0 \quad V_3 = 36.0$

	Ke / Dari	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
U_1=22.8	Inggris	54.0 70	40.5	27.6	70
U_2 = 0	Perancis	31.2 55	36.0 55	25.0	110
U_3=–24	Spanyol	52.8	33.6 5	33.6 75	80
	Demand	125	60	75	260

- $u_2 = 0$
- $c_{21} = u_2 + v_1 \quad \rightarrow \quad 31.2 = 0 + v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = 31.2$
- $c_{22} = u_2 + v_2 \quad \rightarrow \quad 36.0 = 0 + v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = 36.0$
- $c_{32} = u_3 + v_2 \quad \rightarrow \quad 33.6 = u_3 + 36.0 \quad \rightarrow \quad u_3 = -2.4$
- $c_{33} = u_3 + v_3 \quad \rightarrow \quad 33.6 = -2.4 + v_3 \quad \rightarrow \quad v_3 = 36.0$
- $c_{11} = u_1 + v_1 \quad \rightarrow \quad 54.0 = u_1 + 31.2 \quad \rightarrow \quad u_1 = 22.8$

Untuk menentukan apakah solusi sudah optimal atau belum dilakukan perhitungan nilai $C_{ij} - u_i - v_j$ untuk setiap kotak yang kosong. Prinsip perhitungan ini sebenarnya sama dengan perhitungan nilai siklus pada metoda stepping stone. Berikut dapat dilihat hasil perhitungan dengan MODI dari setiap kotak kosong.

- kotak (1,2) $\rightarrow c_{12} - u_1 - v_2$

  $40.5 - 22.8 - 36.0 = -18.3$

- kotak (1,3) $\rightarrow c_{13} - u_1 - v_3$

  $27.6 - 22.8 - 36.0 = -31.2$

- kotak (2,3) $\rightarrow c_{23} - u_2 - v_3$

  $25.0 - 0 - 36.0 = -11$

- kotak (3,1) $\rightarrow c_{31} - u_3 - v_1$

  $52.8 - (-2.4) - 31.2 = 24.0$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa solusi tersebut belum optimal, karena masih dapat dilakukan penurunan biaya bila dilakukan pengalihan alokasi ke kotak kosong.

PERBAIKAN SOLUSI BELUM OPTIMAL

Pada solusi yang belum optimal, yang diketahui berdasarkan hasil uji optimalitas, perlu dilakukan perbaikan-perbaikan sehingga nantinya akan diperoleh solusi yang optimal. Perbaikan solusi ini dapat dilakukan dengan cara yang akan diuraikan berikut ini.

Hasil uji optimalitas dikatakan belum optimal bila masih ada suatu hasil pengalihan alokasi ke kotak kosong yang menyebabkan turunnya biaya yang harus dikeluarkan. Dari hasil uji optimalitas pada contoh masalah yang dibahas, dapat dilihat ada tiga pengalihan alokasi yang dapat menurunkan biaya. Karena yang diinginkan adalah pengeluaran biaya yang seminimal mungkin, maka dipilih suatu pengalihan alokasi yang menyebabkan penurunan biaya terbesar untuk tiap satuan pengalihannya, dan dilakukan perbaikan solusi.

Perbaikan solusi dilakukan berdasarkan siklus pengalihan lokasi pada kotak kosong yang terpilih tadi. Pada siklus tersebut dicari suatu jumlah pengurangan yang terkecil dari kotak yang terisi, dan menjadikan jumlah tersebut sebagai jumlah alokasi yang diberikan pada kotak kosong yang terpilih. Untuk lebih jelasnya dapat diperhatikan contoh berikut.

Berdasarkan hasil perhitungan uji optimalitas di atas diperoleh kotak kosong yang terpilih adalah kotak (1,3). Jadi untuk memperbaiki solusi, kita perlu mengalihkan alokasi ke kotak ini. Pada Gambar 5.2. terlihat bahwa siklus pengalihan alokasi ke kotak (1,3) melibatkan pengurangan alokasi dari kotak (1,1),(2,2) dan (3,3). Pada kotak-kotak tersebut terdapat alokasi sebesar 70, 55 dan 75, yang berarti besar pengalihan alokasi ke kotak (1,3) adalah 55 karena jumlah ini merupakan jumlah pengurangan yang terkecil. Berdasarkan hasil perbaikan ini diperoleh solusi baru seperti yang terlihat pada Tabel 5.9.

Tabel 5.9. Hasil Perbaikan Solusi Awal (Tabel 5.4.)

Dari \ Ke	GANDUM	BARLEY	OAT	SUPPLY
Inggris	54.0 15	40.5	27.6 55	70
Perancis	31.2 110	36.0	25.0	110
Spanyol	52.8	33.6 60	33.6 20	80
Demand	125	60	75	260

Solusi baru yang diperoleh tersebut perlu diuji optimalitas lagi, dan bila belum optimal maka harus dilakukan perbaikan lagi. Demikian seterusnya hingga akhirnya diperoleh solusi yang optimal seperti yang terdapat pada Tabel 5.10.

Tabel 5.10.

Ke / Dari	GANDUM		BARLEY		OAT		SUPPLY
Inggris		54.0		40.5	70	27.6	70
Perancis	110	31.2		36.0		25.0	110
Spanyol	15	52.8	60	33.6	5	33.6	80
Demand	125		60		75		260

PENAMBAHAN DUMMY DAN PENGGUNAAN BIG M

Kolom/baris dummy ditambahkan bila jumlah demand tidak sama dengan jumlah supply, atau terkadang disebut sebagai masalah tak seimbang. Pada kolom/baris dummy ini diberikan nilai keuntungan/kerugian sebesar nol. Sedangkan untuk suatu hubungan sumber dan tujuan yang tidak mungkin (boleh) terjadi, untuk hubungan keduanya diberikan nilai keuntungan sebesar -M atau nilai kerugian sebesar M. Nilai M ini mewakili bilangan yang sangat besar bila dibandingkan dengan bilangan-bilangan lain yang menunjukkan nilai keuntungan/kerugian lainnya. -M berarti suatu keuntungan yang sangat kecil dan M berarti kerugian yang sangat besar.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah perusahaan penerbangan regional dapat membeli bahan bakar jetnya dari tiga penjual. Untuk bulan mendatang perusahaan penerbangan ini membutuhkan pada tiap-tiap bandara dari ketiga bandara yang dilayaninya sebanyak 100.000 galon dibandara 1, 180.000 galon di bandara 2 dan 350.000 galon di bandara 3. Setiap penjual dapat memasukkan bahan bakar dari tiap-tiap bandara dengan harga (dalam sen dolar per galon) yang diberikan oleh daftar berikut :

	Bandara 1	Bandara 2	Bandara 3
Penjual 1	92	89	90
Penjual 2	91	91	95
Penjual 3	87	90	92

Tetapi tiap-tiap penjual dibatasi oleh jumlah galon yang dapat ia sediakan selama sebulan. Kapasitas mereka adalah 320.000 galon bagi penjual 1 270.000 galon bagi penjual 2 dan 190.000 galon bagi penjual 3. Tentukan suatu kebijaksanaan pembelian yang akan mensuplai kebutuhan perusahaan penerbangan ini pada tiap bandara dengan biaya total minimum.

2. Perusahaan "PETRUK" bergerak di bidang produksi bahan batik tulis. Guna menghasilkan batik-batik tulis cantik yang diinginkan oleh para konsumennya, perusahaan ini mempunyai 3 lokasi work-shop dengan kapasitas produksi untuk work-shop 1,2,3 berturut-turut adalah 30, 25 dan 40 potong perbulannya. Perusahaaan ini mensupplai kebutuhan batik dari 4 orang designer yang merupakan langganan utamanya. Kebutuhan batik dari keempat orang designer tersebut masing-masing adalah 25 potong perbulannya. Total biaya produksi di setiap work-shop tersebut adalah Rp 50 000 per-potongnya. Biaya pengiriman perpotong dari setiap work-shop ke setiap designer dapat dilihat pada tabel berikut.

	Designer 1	Designer 2	Designer 3
Work-shop 1	6000	2000	4000
Work-shop 2	1000	4000	2000
Work-shop 3	7000	5000	8000

Setiap designer memberikan harga yang berbeda untuk setiap potong batik yang dimintanya.

Designer	Harga yang diberikan
1	62 000
2	60 000
3	65 000

Pihak manajemen perusahaan tersebut ingin mengetahui bagaimana sebaiknya pengaturan jumlah pengiriman dari setiap work-shop ke setiap designer agar keuntungan yang diperoleh maksimal. Dan tentukan pula work-shop mana yang masih mempunyai persediaan batik untuk dijual ke konsumen lainnya pada setiap akhir bulan dan dalam jumlah berapa.