



**MASALAH PENUGASAN**  
**(ASSIGNMENT PROBLEMS)**

---

Masalah penugasan (assignment problem), seperti juga masalah transportasi merupakan suatu kasus khusus yang ditemui dalam pemrograman linier (linear programming). Dalam masalah penugasan kita akan mendelegasikan sejumlah tugas (assignment) kepada sejumlah penerima tugas (assignee) dalam basis satu-satu. Jadi pada masalah penugasan ini diasumsikan bahwa jumlah assignment sama dengan jumlah assignee. Jadi data pokok pertama yang harus dimiliki dalam menyelesaikan suatu masalah penugasan adalah jumlah assignee dan jumlah assignment.

Selain data jumlah assignee dan jumlah assignment yang terlibat, data lain yang biasa diperlukan adalah besar kerugian yang ditimbulkan atau besar keuntungan yang didapatkan oleh setiap assignee dalam menyelesaikan setiap assignment.

Sedangkan tujuan yang ingin dicapai dalam menyelesaikan masalah ini adalah berusaha untuk menjadwalkan setiap assignee pada suatu assignment sedemikian rupa sehingga kerugian yang ditimbulkan minimal atau keuntungan yang didapatkan maksimal.

Yang dimaksud dengan kerugian dalam masalah ini adalah biaya dan waktu, sedang yang termasuk dalam keuntungan diantaranya adalah pendapatan, laba dan nilai kemenangan. Dari sini terlihat bahwa secara garis besar ada dua jenis masalah assignment, yaitu masalah minimisasi dan masalah maksimisasi.

Berikut ini adalah beberapa contoh kegiatan yang termasuk dalam masalah assignment.

## ***PENEMPATAN KARYAWAN PADA SUATU POSISI JABATAN DI PERUSAHAAN***

---

Suatu perusahaan mempunyai empat posisi jabatan yang kosong. Sang Direktur telah mempunyai empat kandidat yang akan ditempatkan pada keempat posisi jabatan tersebut, tetapi sang Direktur belum bisa memutuskan kandidat mana yang akan ditempatkan pada jabatan yang mana. Dengan menggunakan data kelebihan/kekurangan dari setiap kandidat, sang Direktur dapat menggunakan metoda penugasan untuk membantunya membuat keputusan.

---

## ***PEMBAGIAN WILAYAH TUGAS SALESMAN***

---

Seorang manajer pemasaran akan menempatkan beberapa salesmannya di beberapa wilayah pemasaran produknya. Berdasarkan data prakiraan keuntungan yang akan diberikan oleh setiap salesman di setiap wilayah pemasaran, sang manajer dapat menjadwalkan penugasan salesman tersebut dengan bantuan metoda penugasan.

## ***PEMBAGIAN TUGAS DALAM SUATU TIM RENANG ESTAFET***

---

Seorang pelatih renang mengasuh empat perenang yang akan diturunkan di nomor estafet gaya ganti. Dikarenakan keempat perenang yang ada di bawah asuhannya menguasai dengan baik setiap gaya, maka pelatih dapat menggunakan bantuan metoda penugasan untuk membantunya membuat keputusan penempatan perenang, berdasarkan pada data waktu terbaik masing-masing perenang di setiap gaya.

Untuk menyelesaikan masalah penugasan, biasa digunakan metoda Hungarian. Metoda ini merupakan modifikasi dari metoda transportasi yang telah dibahas sebelumnya. Untuk dapat diselesaikan dengan menggunakan metoda Hungarian ini, maka data dari masalah tersebut harus dipresentasikan dalam bentuk tabel penugasan seperti yang terlihat pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1. Tabulasi Masalah Penugasan

<b>Assignment</b> <b>Assignee</b>	1	2	...	n
1	$A_{11}$	$A_{12}$	...	$A_{1n}$
2	$A_{21}$	$A_{22}$	...	$A_{2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$A_{n1}$	$A_{n2}$	...	$A_{nn}$

---

Pada Tabel 6.1.,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  hingga  $A_{nn}$  mempresentasikan data keuntungan yang diperoleh atau kerugian yang ditimbulkan oleh setiap assignee dalam menyelesaikan suatu assignment. Misalnya,  $A_{11}$  adalah data yang mempresentasikan keuntungan yang diperoleh atau kerugian yang ditimbulkan oleh assignee 1 dalam menyelesaikan assignment 1.

Pada bagian terdahulu telah disebutkan bahwa pada masalah penugasan disyaratkan suatu penugasan satu-satu, sehingga jumlah assignee dan assignmentnya harus sama. Bila pada suatu masalah ditemui adanya jumlah assignee dan assignment yang berbeda, maka perlu ditambahkan suatu assignee/assignment dummy untuk menyamakan jumlahnya. Penambahan baris/kolom dummy ini merupakan langkah awal dalam pembuatan tabel penugasan.

Setelah data terpresentasi dalam bentuk tabel penugasan, maka kita dapat langsung menyelesaikannya dengan menggunakan metoda Hungarian. Dalam penyelesaiannya, masalah penugasan ini terbagi dua yaitu masalah maksimisasi dan masalah minimisasi. Pada masalah maksimisasi, data yang tersaji adalah data keuntungan, dan pada masalah minimisasi data yang tersaji adalah data kerugian.

## **MASALAH MINIMISASI**

---

Langkah-langkah penyelesaian dengan metoda Hungarian untuk masalah minimisasi adalah sebagai berikut :

1. Ditentukan nilai terkecil dari setiap baris, lalu mengurangkan semua nilai dalam baris tersebut dengan nilai terkecilnya.
2. Diperiksa apakah setiap kolom telah mempunyai nilai nol. Bila sudah dilanjutkan ke langkah 3; bila belum, dilakukan penentuan nilai terkecil dari setiap kolom yang belum mempunyai nilai nol, kemudian setiap nilai pada kolom tersebut dikurangkan dengan nilai terkecilnya.
3. Ditentukan apakah terdapat  $n$  elemen nol dimana tidak ada 2 nilai nol yang berada pada baris/kolom yang sama, dimana  $n$  adalah jumlah kolom/baris. Jika ada, maka tabel telah optimal; jika tidak dilanjutkan ke langkah 4.
4. Dilakukan penutupan semua nilai nol dengan menggunakan garis vertikal/horisontal seminimal mungkin.

5. Ditentukan nilai terkecil dari nilai-nilai yang tidak tertutup garis. Lalu semua nilai yang tidak tertutup garis dikurangkan dengan nilai terkecil tersebut, dan nilai yang tertutup oleh dua garis ditambahkan dengan nilai terkecil tersebut.
6. Kembali ke langkah 3.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh penyelesaian masalah berikut ini.

Contoh :

Seorang pelatih renang ingin membentuk tim renang yang tangguh untuk terjun di nomor 400 m estafet gaya ganti pada suatu pertandingan tingkat nasional. Ada empat perenang di bawah asuhannya, yang merupakan perenang terbaiknya, yang menguasai dengan baik keempat gaya yang dipertandingkan. Pelatih ingin melakukan penugasan satu perenang pada satu gaya berdasarkan data waktu terbaik mereka untuk tiap gaya pada nomor 100 meter yang tersaji pada Tabel 6.2. dengan bantuan metoda Hungarian.

Tabel 6.2. Data Perolehan Waktu (dalam detik)

Perenang Gaya	Budi	Giri	Koko	Fajar
Kupu-kupu	52.4	48.3	55.6	49.5
Dada	55.4	58.2	59.1	57.3
Punggung	62.7	62.5	60.9	63.2
Bebas	47.7	49.1	53.5	52.1

Penyelesaian :

Pada suatu pertandingan renang selalu diinginkan waktu tercepat yang mungkin dapat dilakukan, sehingga masalah ini masuk ke dalam masalah *minimisasi*.

Berdasarkan data yang tersaji pada Tabel 6.2., maka langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan nilai terkecil dari setiap baris. Hasil penentuan nilai terkecil tersebut adalah sebagai berikut :

- baris I : 48.3
- baris II : 55.4

- baris III : 60.9
- baris IV : 47.7,

sehingga setiap nilai pada baris I dikurangkan dengan 48.3, setiap nilai pada baris II dikurangkan dengan 55.4, setiap nilai pada baris III dikurangkan dengan 60.9 dan setiap nilai pada baris IV dikurangkan dengan 47.7. Hasil perhitungan langkah pertama ini dapat dilihat pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3. Hasil Perbaikan Pertama

Perenang Gaya	Budi	Giri	Koko	Fajar
Kupu-kupu	4.1	0	7.3	1.2
Dada	0	2.8	3.7	1.9
Punggung	1.8	1.6	0	2.3
Bebas	0	1.4	5.8	4.4

Selanjutnya, dilakukan pemeriksaan apakah setiap kolom telah mempunyai nilai nol. Ternyata pada kolom IV belum terdapat nilai nol, sehingga perlu dilakukan penentuan nilai terkecil dari kolom ini, yaitu 1.2. Kemudian setiap nilai pada kolom IV ini dikurangkan dengan 1.2, sehingga diperoleh nilai seperti yang tersaji pada Tabel 6.4.

Tabel 6.4. Hasil Perbaikan Kedua

Perenang Gaya	Budi	Giri	Koko	Fajar
Kupu-kupu	4.1	0	7.3	0
Dada	0	2.8	3.7	0.7
Punggung	1.8	1.6	0	1.1
Bebas	0	1.4	5.8	3.2

Langkah berikutnya adalah memeriksa apakah telah terdapat suatu penugasan yang layak. Bila diperhatikan akan ditemui sejumlah 5 nilai nol pada Tabel 6.4. Tetapi dari kelima nilai nol tersebut, tidak ada empat nilai nol yang keempat-empatnya terdapat pada baris dan kolom yang berbeda. Misalnya kita ambil nilai nol pada kotak (1,2), (2,1), (3,3) dan (4,1); kita masih menemukan adanya dua nilai nol yang berada pada kolom yang sama yaitu nilai nol pada kotak (2,1) dan (4,1). Hal yang sama juga akan terjadi pada kemungkinan-kemungkinan yang lainnya. Ini menandakan bahwa tabel belum optimal, sehingga perlu dilakukan langkah-langkah selanjutnya guna mendapatkan tabel yang optimal.

Langkah selanjutnya adalah menutup seluruh nilai nol dengan garis vertikal dan horisontal seminimal mungkin, seperti yang terlihat pada Tabel 6.5.

Tabel 6.5. Hasil Perbaikan Ketiga

Perenang Gaya	Budi	Giri	Koko	Fajar
Kupu-kupu	4.1	0	7.3	0
Dada	0	2.8	3.7	0.7
Punggung	1.8	1.6	0	1.1
Bebas	0	1.4	5.8	3.2

Pada Tabel 6.5. terlihat bahwa jumlah garis yang menutup nilai nol tersebut ada tiga, dan ini merupakan jumlah yang minimal, karena tidak mungkin menutup semua nilai nol dengan hanya dua garis vertikal/horisontal.

Setelah seluruh nilai nol tertutup oleh garis vertikal/horisontal, maka dilakukan penentuan nilai terkecil dari nilai-nilai yang tidak tertutup garis. Bila diperhatikan Tabel 6.5., maka nilai terkecil yang dimaksud adalah 0.7. Selanjutnya kita kurangkan setiap nilai yang tidak tertutup garis dengan 0.7, dan kita tambahkan setiap nilai yang tertutup oleh dua garis dengan 0.7. Langkah ini menghasilkan nilai seperti yang tersaji pada Tabel 6.6.

Tabel 6.6. Tabel Akhir (Optimal)

Perenang Gaya	Budi	Giri	Koko	Fajar
Kupu-kupu	4.8	0	7.3	0
Dada	0	2.1	3.0	0
Punggung	2.5	1.6	0	1.1
Bebas	0	2.1	6.5	3.9

Berikutnya kembali dilakukan pemeriksaan apakah telah terdapat suatu penugasan yang layak yang memeberikan solusi optimal. Pada Tabel 6.6. terlihat bahwa terdapat sejumlah empat nilai nol yang keempat-empatnya berada pada baris dan kolom yang berbeda, sehingga dapat dikatakan bahwa tabel telah optimal. Dengan telah diperolehnya tabel yang optimal, maka kita tinggal melakukan penugasan assignment ke assignee. Penugasan ini diberikan kepada pasangan assignee-assignment pada kotak yang bernilai nol pada tabel optimal.

Penentuan penugasan sebaiknya dimulai dari baris yang hanya mengandung satu nilai nol. Pada Tabel 6.6. baris yang dimaksud adalah baris ke-3 dan ke-4. Hal ini berarti gaya punggung ditugaskan kepada Koko, dan gaya bebas kepada Budi. Kemudian untuk baris ke-2, karena Budi telah mendapatkan tugas di gaya bebas, maka gaya dada diberikan kepada Fajar, sedangkan gaya kupu-kupu, pada baris ke-1, diberikan kepada Giri. Berdasarkan pada penugasan tersebut, maka perolehan waktu yang diperkirakan pada nomor 400 estafet gaya ganti adalah  $48.3 + 57.3 + 60.9 + 47.7 = 214.2$  detik.

## **MASALAH MAKSIMISASI**

Langkah-langkah penyelesaian dengan metoda Hungarian untuk masalah maksimisasi adalah sebagai berikut :

1. Ditentukan nilai terbesar dari setiap baris, lalu mengurangkan semua nilai pada setiap baris dari nilai terbesarnya.



2. Diperiksa apakah setiap kolom telah mempunyai nilai nol. Bila sudah dilanjutkan ke langkah 3; bila belum, dilakukan penentuan nilai terkecil dari setiap kolom yang belum mempunyai nilai nol, kemudian setiap nilai pada kolom tersebut dikurangkan dari nilai terkecilnya.
3. Ditentukan apakah terdapat  $n$  elemen nol dimana tidak ada 2 nilai nol yang berada pada baris/kolom yang sama, dimana  $n$  adalah jumlah kolom/baris. Jika ada, maka tabel telah optimal; jika tidak dilanjutkan ke langkah 4.
4. Dilakukan penutupan semua nilai nol dengan menggunakan garis vertikal/horisontal seminimal mungkin.
5. Ditentukan nilai terkecil dari nilai-nilai yang tidak tertutup garis. Lalu semua nilai yang tidak tertutup garis dikurangkan dengan nilai terkecil tersebut, dan nilai yang tertutup oleh dua garis ditambahkan dengan nilai terkecil tersebut.
6. Kembali ke langkah 3.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh penyelesaian masalah berikut ini.

Contoh :

Seorang manajer pemasaran ingin menempatkan empat orang salesmannya di empat daerah pemasaran produknya. Penempatan salesman tersebut didasarkan pada perolehan nilai keuntungan yang diperkirakan akan diperoleh oleh setiap salesman di setiap daerah pemasaran berdasarkan prestasi kerja mereka saat ini dan pengenalan terhadap masing-masing daerah pemasaran tersebut. Bila data perolehan keuntungan dari setiap salesman di setiap daerah pemasaran seperti yang tersaji pada Tabel 6.7., tentukan penugasan salesman yang harus dibuat oleh sang manajer agar keuntungan yang diperoleh maksimal.

Tabel 6.7. Data perolehan keuntungan

D. pem. 1	D. pem. 2	D. pem. 3	D. pem.4
Sal. 1 1000	900	1100	900
Sal. 2 1100	1000	950	950
Sal. 3 1050	950	900	1050
Sal. 4 1150	1000	950	1000

Penyelesaian :

Tujuan yang ingin dicapai dalam penugasan salesman di atas adalah diperolehnya keuntungan yang maksimal, sehingga masalah ini tergolong dalam masalah maksimisasi.

Langkah pertama untuk menyelesaikan masalah ini dengan menggunakan metoda Hungarian adalah menentukan nilai terbesar dari setiap baris, dengan hasil sebagai berikut :

- baris I : 1100
- baris II : 1100
- baris III : 1050
- baris IV : 1150.

Hal ini berarti bahwa nilai-nilai keuntungan pada baris I dikurangkan dari 1100, baris II dikurangkan dari 1100, baris III dikurangkan dari 1050 dan baris IV dikurangkan dari 1150. Hasil perhitungan langkah pertama ini dapat dilihat pada Tabel 6.8.

Tabel 6.8. Hasil Perbaikan Pertama

	D. pem. 1	D. pem. 2	D. pem. 3	D. pem. 4.
Salesman 1	100	200	0	200
Salesman 2	0	100	150	150
Salesman 3	0	100	150	0
Salesman 4	0	150	200	150

Selanjutnya diperiksa apakah setiap kolom telah mempunyai nilai nol. Ternyata pada Tabel 6.8. terlihat bahwa kolom II belum mempunyai nilai nol, sehingga perlu ditentukan nilai terkecil dari kolom tersebut, yaitu 100. Setiap nilai pada kolom II dikurangkan dari 100, sehingga diperoleh hasil seperti pada Tabel 6.9.

Tabel 6.9. Tabel Akhir (Optimal)

	D. pem. 1	D. pem. 2	D. pem. 3	D. pem. 4.
Salesman 1	100	100	0	200
Salesman 2	0	100	150	150
Salesman 3	0	0	150	0
Salesman 4	0	50	200	150

Sekarang dilihat apakah ada empat nilai nol pada Tabel 6.9 dimana keempat-empatnya berada pada baris dan kolom yang berbeda. Ternyata ada, sehingga Tabel 6.9. dapat dinyatakan sebagai tabel optimal.

Sebagai langkah terakhir adalah penentuan penugasan salesman ke daerah pemasaran berdasarkan pada nilai-nilai nol tadi. Dimulai dengan baris dengan jumlah nilai nol satu, yaitu baris I dan IV, yang berarti salesman 1 ditempatkan di daerah pemasaran 3, salesman 4 ditempatkan di daerah pemasaran 1. Untuk baris II terdapat dua nilai nol, tetapi karena daerah pemasaran 1 telah diberikan kepada salesman 4, maka salesman 2 ditempatkan di daerah pemasaran 2; dan yang terakhir, salesman 3 ditempatkan di daerah pemasaran 4.

Berdasarkan penugasan yang dibuat di atas maka nilai keuntungan yang akan diperoleh adalah sebesar  $1100 + 1000 + 1050 + 1150 = 4300$ .

---

## ***PENAMBAHAN DUMMY DAN PENGGUNAAN BIG M***

---

Kolom/baris dummy ditambahkan bila jumlah assignee tidak sama dengan assignment, atau terkadang disebut sebagai masalah tak seimbang. Pada kolom/baris dummy ini diberikan nilai keuntungan/kerugian sebesar nol. Sedangkan untuk suatu hubungan assignee dan assignment yang tidak mungkin (boleh) terjadi, untuk hubungan keduanya diberikan nilai keuntungan sebesar  $-M$  atau nilai kerugian sebesar  $M$ . Nilai  $M$  ini mewakili bilangan yang sangat besar bila dibandingkan dengan bilangan-bilangan lain yang menunjukkan nilai keuntungan/kerugian lainnya.  $-M$  berarti suatu keuntungan yang sangat kecil dan  $M$  berarti kerugian yang sangat besar.

---

## SOAL-SOAL LATIHAN

---

1. Sebuah perusahaan restoran swalayan (fast-food) ingin membangun empat buah toko di daerah perkotaan Bandung. Di masa lalu, perusahaan ini telah menggunakan enam perusahaan bangunan yang berbeda dan merasa puas dengan hasil kerja masing-masing perusahaan ini. Karena itu ia menawarkan mereka tiap-tiap pekerjaan ini. Tawaran akhir (dalam ribuan dolar) tersaji dalam tabel berikut.

### PERUSAHAAN BANGUNAN

	1	2	3	4	5	6
Toko 1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
Toko 2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
Toko 3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
Toko 4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

Karena perusahaan fast-food ini ingin keempat buah kedai ini siap secepat mungkin, maka ia akan menghadihkan paling tinggi satu pekerjaan bagi satu perusahaan bangunan. Penetapan yang manakah yang akan menghasilkan biaya total minimum bagi fast-food ini ?

2. Perusahaan ALA-MEDIA adalah perusahaan penerbitan koran dengan oplah tersebar di Indonesia. Saat ini perusahaan tersebut sedang mengadakan perekrutan tenaga wartawan baru untuk ditempatkan di bawah pengelola rubrik seni/budaya, politik/hukum, ekonomi/bisnis dan ilmu pengetahuan, dimana masing-masing pengelola rubrik tersebut membutuhkan satu wartawan baru. Setelah melalui beberapa kali tes penyaringan, akhirnya diperoleh 6 kandidat yang akan diberi kesempatan untuk melakukan praktek kerja selama 1 bulan guna menunjukkan kemampuannya dalam rangka bersaing memperebutkan 4 tempat kosong yang ditawarkan. Keenam kandidat tersebut harus melakukan tugas peliputan berita dan membuat laporannya, menulis artikel berdasarkan suatu hasil laporan, dan mengedit artikel untuk siap cetak dalam waktu *dead-line* tertentu, untuk keempat rubrik tadi.

Hasil evaluasi terhadap kemampuan dan prestasi dari para kandidat wartawan selama praktek kerja tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Kandidat	Peliputan & laporan				Artikel				Pengeditan			
	S/B	P/H	E/B	I/T	S/B	P/H	E/B	I/T	S/B	P/H	E/B	I/T
Adi	10	9	8	8	10	9	10	8	8	7	7	8
Ari	9	9	10	9	9	9	8	8	8	8	8	7
Ati	10	8	8	9	8	8	9	10	8	8	7	8
Beny	8	10	9	8	8	8	10	9	8	7	8	7
Bety	9	9	10	9	8	7	9	8	8	8	8	8
Beno	9	8	8	7	7	9	9	8	8	8	7	8

Ket :

S/B : Seni/Budaya

P/H : Politik/Hukum

E/B : Ekonomi/Bisnis

I/T : Ilmu Pengetahuan/Teknologi

Berdasarkan hasil evaluasi tersebut bagaimana sebaiknya keputusan yang diambil oleh bagian perekrutan dari perusahaan tersebut dilihat dari sudut riset operasional ?