7 GAME THEORY

GAME THEORY IALAH

Suatu pendekatan matematis uantuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan.

Dalam game theory dilibatkan dua atau lebih pengambil keputusan atau yang biasa disebut **pemain**. Setiap pemain dalam game theory mempunyai keinginan untuk menang.

Kasus-kasus dalam game theory, sebelum diselesaikan dengan menggunakan salah satu metoda game theory, diidentifikasi dulu berdasarkan :

- Jumlah pemain
- Jumlah keuntungan dan kerugian atau yang biasa disebut dengan nilai permainan
- Jenis strategi yang digunakan

Berdasarkan jumlah pemain ada dua jenis games yang dikenal, yaitu **two-person games** dan **N-person games**. Jumlah pemain yang terlibat dalam two-person games adalah dua, dan dalam N-person games adalah lebih dari dua. Sedangkan berdasarkan jumlah keuntungan dan kerugian dikenal dua jenis games, yaitu **zero-sum games** dan **non zero-sum games**. Nilai permainan dalam zero-sum games adalah nol, sedangkan dalam non zero-sum games nilai permainannya tidak sama dengan nol. Yang akan kita bahas di sini adalah jenis TWO-PERSON ZERO-SUM GAMES.

Ada dua jenis strategi permainan yang biasa digunakan, yaitu **Pure Strategy** dan **Mixed Strategy**.

Ada dua asumsi dalam game theory, yaitu :

Matriks pay-off* harus diketahui oleh setiap pemain strategi permainan tidak dapat dirusak oleh pesaing/faktor lain.

* hasil permainan dengan menggunakan kombinasi berbagai strategi

PURE STRATEGY

Hasil yang optimal dari suatu permainan yang mempunyai *saddle point* dapat diperoleh dengan menggunakan **pure strategy**.

Yang dimaksud dengan ***saddle point*** adalah semacam titik keseimbangan antara nilai permainan kedua pemain.

Dalam pure strategy digunakan kriteria **maksimin** dan **minimaks**. Maksimin adalah nilai maksimum dari nilai-nilai minimum, dan minimaks adalah nilai minimum dari nilai-nilai maksimum.

Langkah-langkah penyelesaian dengan PURE STRATEGY :

1. Terjemahkan setiap kasus ke dalam bentuk matriks segi, dimana satu pemain berperan sebagai pemain baris dan yang lain berperan sebagai pemain kolom.
2. Pay-off bernilai positif berarti keuntungan bagi pemain baris.
3. Pay-off bernilai negatif berarti keuntungan bagi pemain kolom.
4. Tentukan nilai minimum setiap baris.
5. Tentukan nilai maksimum dari langkah ke-4.

$\}\longrightarrow$ Maksimin

6. Tentukan nilai maksimum setiap kolom.
7. Tentukan nilai minimum dari langkah ke-6.

$\}\longrightarrow$ Minimaks

IF MINIMAKS = MAKSIMIN ======> THERE'S A SADDLE POINT

Contoh :

Tentukan *saddle point* dari permainan dengan matriks pay-off berikut :

II

		1	2	3
I	1	–3	–2	6
	2	2	0	2
	3	5	–2	–4

Berdasarkan kriteria maksimin untuk pemain baris :

- nilai minimum pada baris 1 : –3

  baris 2 : 0

  baris 3 : –4

nilai maksimum dari (-3,0,-4) adalah 0, jadi nilai maksimin-nya = 0

Berdasarkan kriteria minimaks untuk pemain kolom :

- nilai maksimum kolom 1 : 5

  kolom 2 : 0

  kolom 3 : 6

- nilai minimum dari (5,0,6) adalah 0, jadi nilai minimaks-nya = 0

Karena nilai maksimin = minimaks ———> ada *saddle point*, yaitu nilai maksimin atau minimaks = 0.

Bisa juga dilakukan penyederhanaan matriks pay-off terlebih dahulu dengan berdasarkan pada kriteria SUPERIORITAS, baru kemudian dianalisa dengan menggunakan kriteria minimaks dan maksimin.

Apakah kriteria superioritas itu ?

SUPERIORITAS adalah suatu kriteria penghilangan suatu kolom atau baris dari suatu matriks pay-off sehingga menjadi lebih sederhana berdasarkan pada pendominasian suatu baris/kolom oleh baris/kolom lainnya.

* Untuk pemain baris ==> If pay-off dari satu strategi > strategi lain
* Untuk pemain kolom ==> If pay-off dari satu strategi < strategi lain

Contoh :

Sederhanakan matriks pay-off permainan berikut dengan menggunakan kriteria superioritas.

		II		
		1	2	3
I	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	–1

Pertama lakukan langkah pemeriksaan antar baris; apakah ada satu baris yang mendominasi baris lainnya. Ternyata ada, yaitu baris 1 mendominasi baris 3, sehingga baris 3 dapat dihilangkan, dan akan diperoleh matriks pay-off sebagai berikut :

		II		
		1	2	3
I	1	1	2	4
	2	1	0	5

Bila diperhatikan kembali matriks pay-off baru di atas, ternyata kolom 2 dan kolom 1 mendominasi kolom 3, sehingga kolom 3 dapat dihilangkan, dan akan diperoleh matriks pay-off berikut :

		II	
		1	2
I	1	1	2
	2	1	0

MIXED STRATEGY

Mixed strategy digunakan untuk mencari solusi optimal dari kasus game theory yang tidak mempunyai saddle point.

Beberapa metoda yang digunakan dalam mixed strategy adalah:

- Metoda Analitis
- Metoda Grafik
- Metoda Pemrograman linier

A. METODA ANALITIS

Metoda ini efektif digunakan untuk menyelesaikan kasus yang sederhana.

Rumus untuk mencari solusi yang optimal adalah :

Untuk pemain baris :

$$\underset{X_i}{\text{Maks}} \left\{ \text{Min} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}X_i , \sum_{i=1}^{m} a_{i2}X_i ,\ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}X_i \right) \right\}$$

a_{in} = pay-off untuk strategi pemain baris ke-i dan strategi pemain kolom ke-n

X_i = peluang strategi ke-i dari pemain baris

Untuk pemain kolom :

$$\underset{Y_i}{\text{Min}} \left\{ \text{Maks} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}Y_j , \sum_{j=1}^{n} a_{2j}Y_j ,\ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}Y_j \right) \right\}$$

a_{mj} = pay-off untuk strategi pemain baris ke-m dan strategi pemain kolom ke-j

Y_j = peluang strategi ke-j dari pemain kolom

Berdasarkan teori probabilitas :

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j = 1$$

$X_i \geq 0$, $Y_j \geq 0$ untuk semua i dan j

Contoh :

Tentukan nilai permainan dari masalah permainan
yang mempunyai matriks pay-off berikut :

Pemain 2

		1	2
P.	1	2	3
1	2	4	1

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut kita periksa terlebih dahulu apakah masalah tersebut mempunyai *saddle point.* Ternyata tidak ada *saddle point*-nya, sehingga masalah permainan ini harus diselesaikan dengan menggunakan *mixed strategy*; dan karena matriks pay-off-nya hanya berukuran 2 x 2, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan metoda analitis. Berikut adalah cara penyelesaiannya (berdasarkan pada pemain baris).

Expected pay-off (pay-off yang diharapkan) :

–. $2X_1 + 4X_2$ ....(1)

–. $3X_1 + X_2$ ....(2)

–. $X_1 + X_2 = 1$ ....(3)

Pers. (3) ⟶ Pers. (1) dan (2)

–. $2 + 2X_2$ ....(4)

–. $3 - 2X_2$ ....(5)

Karena permainan stabil (optimal) yang diinginkan, maka :

$$2 + 2X_2 = 3 - 2X_2$$

$$4X_2 = 1$$

$$X_2 = 1/4$$

Sehingga $X_1 = 3/4$ dan nilai permainan = 2 1/2.

B. METODA GRAFIK

Metoda grafik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah permainan yang mempunyai matriks pay-off berukuran 2 x n atau m x 2. Penyelesaian dengan menggunakan metoda grafik ini diawali dengan melihat nilai pay-off yang diharapkan untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh lawan. Dimana pada masalah ini nilai pay-off yang diharapkan ditentukan oleh peluang penggunaan setiap strategi. Untuk lebih jelasnya, perhatikan pembahasan berikut.

Permainan 2 x n

Bila matriks suatu permainan berukuran 2 x n, maka permainan tersebut dapat diselesaikan dengan metoda grafik didasarkan pada cara penyelesaian berikut :

- Bila X_1 adalah peluang penggunaan strategi 1 dan X_2 adalah peluang penggunaan strategi 2 oleh pemain baris, maka $X_1 + X_2 = 1$.
- Nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain baris dapat diketahui untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh pemain kolom dengan didasarkan pada peluang penggunaan setiap strateginya tersebut (X_1 dan X_2).
- Dilakukan pembuatan grafik hubungan nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain baris pada setiap peluang untuk setiap strategi murni pemain kolom.
- Berdasarkan kriteria maksimin dapat ditentukan peluang penggunaan setiap strategi pemain baris dan nilai permainannya.

Permainan m x 2

Bila matriks suatu permainan berukuran m x 2, maka permainan tersebut dapat diselesaikan dengan metoda grafik didasarkan pada cara penyelesaian berikut :

- Bila Y_1 adalah peluang penggunaan strategi 1 dan Y_2 adalah peluang penggunaan strategi 2 oleh pemain kolom, maka $Y_1 + Y_2 = 1$.
- Nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain kolom dapat diketahui untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh pemain baris dengan didasarkan pada peluang penggunaan setiap strateginya tersebut (Y_1 dan Y_2).
- Dilakukan pembuatan grafik hubungan nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain kolom pada setiap peluang untuk setiap strategi murni pemain baris.
- Berdasarkan kriteria minimaks dapat ditentukan peluang penggunaan setiap strategi pemain kolom dan nilai permainannya.

Contoh :

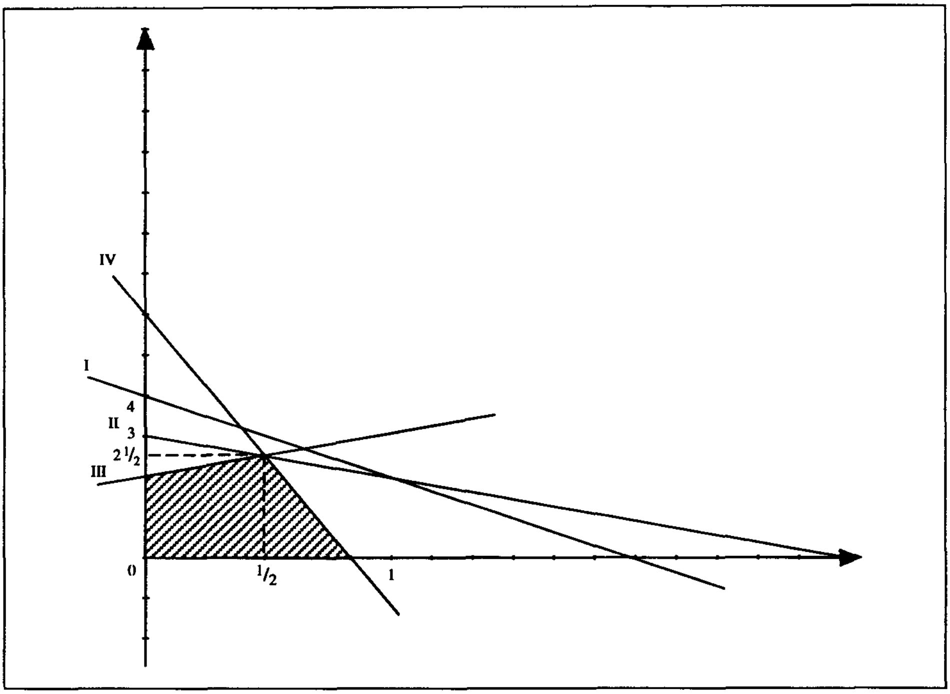
Berapa nilai permainan dari permainan yang mempunyai matriks pay-off berikut :

	1	2	3	4
1	2	2	3	–1
2	4	3	2	6

Karena matriks pay-off dari permainan di atas berukuran 2 x 4, maka nilai permainan tersebut dapat dicari dengan menggunakan metoda grafik. Pertama ditentukan nilai pay-off yang diharapkan (expected pay-off) pada pemain baris untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh pemain kolom.

Strategi murni	Expected pay-off
1	$-2X_1 + 4$
2	$-X_1 + 3$
3	$X_1 + 2$
4	$-7X_1 + 6$

Setiap expected pay-off untuk setiap strategi murni, dibuat grafiknya yang merupakan hubungan peluang dan nilai pay-offnya. Sumbu X pada grafik merupakan nilai peluang penggunaan strategi dan sumbu Y merupakan nilai pay-off-nya. Karena peluang hanya mempunyai kisaran nilai antara 0 hingga 1, maka kisaran nilai pada sumbu X adalah antara 0 hingga 1. Kemudian nilai pay-off dapat dibuat grafiknya dengan mencari nilai pay-off pada nilai peluang 0 dan 1, hingga diperoleh bentuk grafik seperti pada Gambar 7.1.



Gambar 7.1

Karena perhitungan didasarkan pada pemain baris, maka digunakan kriteria maksimin, dan diperoleh nilai permainan untuk suatu permainan yang stabil adalah nilai pada titik C.

Peluang penggunaan strategi 1 dapat diketahui dengan menarik garis dari titik C ke sumbu X. Dari sini diperoleh nilai X_1; dan nilai X_2 dapat diperoleh dari persamaan $X_1 + X_2 = 1$. Sedangkan nilai permainan dapat dihitung dengan memasukkan nilai X_1 ke salah satu persamaan yang melalui titik C.

Berdasarkan pada perhitungan tersebut, maka untuk masalah di atas diperoleh nilai $X_1 = 1/2$, $X_2 = 1/2$ dan nilai permainan (V) = 2 1/2.

C. METODA PEMROGRAMAN LINIER

Metoda pemrograman linier yang dimaksud di sini adalah merumuskan masalah permainan (game theory) ke bentuk masalah pemrograman linier dan menyelesaikannya dengan menggunakan metoda simpleks.

Dasar perumusannya adalah sebagai berikut.

Untuk Pemain Baris :

$$\underset{X_i}{\text{Maks}} \left\{ \text{Min} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}X_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}X_i \right) \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = 1 \quad \text{dan} \quad X_i \geq 0 \text{ , } i = 1,2,\ldots,m$$

V (nilai permainan) adalah :

$$\text{Min} \left(\sum a_{i1} \underset{i=1}{\overset{m}{X_i}}, \sum a_{i2} \underset{i=1}{\overset{m}{X_2}}, \ldots, \sum a_{in} \underset{i=1}{\overset{m}{X_i}} \right)$$

Pada model pemrograman linier kita kenal adanya fungsi obyektif dan kendala. Untuk masalah permainan ini dasar fungsi obyektif dan kendalanya adalah :

Fungsi obyektif :

Memaksimumkan nilai permainan terhadap kendala :

Solusi optimal untuk pemain baris

Sehingga akan diperoleh model matematis sebagai berikut :

Fungsi obyektif :

Maksimumkan $Z = V$

terhadap kendala :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq V \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

dimana

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = 1 \quad \text{dan} \quad X_i \geq 0 \text{ untuk semua } i$$

Pada kendala diberikan tanda ≥ karena pemain baris selalu ingin mendapatkan nilai kemenangan yang lebih besar dari kemungkinan-kemungkinan yang dapat diperoleh.

Bila dijabarkan lebih lanjut, maka model matematisnya menjadi :

Fungsi obyektif :

Maksimumkan $Z = V$

terhadap kendala :

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + \ldots + a_{m1}X_m \geq V$$
$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 + \ldots + a_{m2}X_m \geq V$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + a_{3n}X_3 + \ldots + a_{mn}X_m \geq V$$
$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m \geq 0$$

Agar pembatas tersebut mempunyai nilai kanan yang berupa bilangan, bukan berupa variabel, maka ruas kiri dan kanan dibagi dengan V dan diasumsikan bahwa $V > 0$, sehingga diperoleh bentuk model matematis berikut :

Fungsi obyektif :

Maksimumkan $Z = V$

terhadap kendala :

$$a_{11}X_1/V + a_{21}X_2/V + a_{31}X_3/V + \ldots + a_{m1}X_m/V \geq 1$$
$$a_{12}X_1/V + a_{22}X_2/V + a_{32}X_3/V + \ldots + a_{m2}X_m/V \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}X_1/V + a_{2n}X_2/V + a_{3n}X_3/V + \ldots + a_{mn}X_m/V \geq 1$$
$$X_1/V, X_2/V, X_3/V, \ldots, X_m/V \geq 0$$

Bila dimisalkan $X_i/V = x_i$ dan karena $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1$, maka akan diperoleh model matematis berikut :

Fungsi obyektif :

Minimumkan $Z = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m$

terhadap kendala :

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \geq 0$$

Untuk pemain kolom :

Dengan cara penurunan yang sama dengan pemain baris, maka untuk pemain kolom akan diperoleh bentuk model matematis sebagai berikut :

Fungsi obyektif :

Maksimumkan $W = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n$

terhadap kendala :

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + \ldots + a_{2n}y_n \leq 1$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \geq 0$$

Masalah permainan yang telah diubah ke bentuk model matematis seperti di atas dapat langsung dicari solusinya dengan menggunakan metoda simpleks yang telah dibahas pada bagian terdahulu.

Tentukan nilai permainan dari masalah permainan yang mempunyai matriks pay-off berikut :

Pemain 2

		1	2	3
P. 1	1	4	2	–3
	2	–1	0	3
	3	2	3	–2

Karena permainan tersebut tidak mempunyai *saddle point*, maka harus diselesaikan dengan menggunakan metoda pemrograman linier. Berikut adalah cara penyelesaiannya (berdasarkan pada pemain kolom).

Bila diperiksa berdasarkan kriteria minimaks akan diperoleh nilai 3 dan dengan kriteria maksimin -1, sehingga nilai permainan optimal akan berkisar antara -1 hingga 3. Karena nilai permainan mungkin bernilai negatif, sedangkan diasumsikan $V > 0$, maka perlu ditambahkan suatu konstanta untuk memenuhi asumsi tersebut, yaitu sebesar 3, sehingga matriks pay-off berubah menjadi:

Pemain 2

		1	2	3
P. 1	1	7	5	0
	2	2	3	6
	3	5	6	1

Model matematis :

Maksimumkan $W = y_1 + y_2 + y_3$

terhadap kendala :

$7y_1 + 5y_2 \leq 1$

$2y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 1$

$5y_1 + 6y_2 + y_3 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Bentuk baku untuk simpleks :

Maksimumkan $W = y_1 + y_2 + y_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

terhadap kendala :

$7y_1 + 5y_2 + S_1 = 1$

$2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + S_2 = 1$

$5y_1 + 6y_2 + y_3 + S_3 = 1$

$y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Tabulasi awalnya :

variabel dasar	W	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	NK
W	1	–1	–1	–1	0	0	0	0
S_1	0	7	5	0	1	0	0	1
S_2	0	2	3	6	0	1	0	1
S_3	0	5	6	1	0	0	1	1

Selanjutnya tinggal menyelesaikannya dengan metoda simpleks hingga diperoleh solusi yang optimal. Perlu diingat bahwa nilai permainan yang diperoleh adalah nilai yang telah ditambah dengan konstanta 3 tadi, sehingga nilai permainan yang sebenarnya harus dikurangkan terlebih dahulu dengan nilai konstanta tersebut. Perlu juga diingat bahwa nilai y_j bukanlah nilai penggunaan strategi ke j, tetapi nilai Y_j-lah yang merupakan nilai peluang tersebut; sehingga untuk mengetahui nilai peluang (Y_j), nilai y_j harus dibagi dengan nilai permainan (V) untuk mendapatkan nilai peluang yang dimaksud.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Cari nilai *saddle point* dari permainan yang mempunyai matriks pay-off berikut :

a.

		II		
		1	2	3
I	1	1	–1	1
	2	–2	0	3
	3	3	1	2

c.

	II		
	1	2	3
1	2	3	1
2	1	4	0
3	3	–2	–1

b.

		II			
		1	2	3	4
I	1	3	–3	–2	–4
	2	–4	–2	–1	1
	3	1	–1	2	0

2. Selesaikan permainan yang mempunyai matriks pay-off berikut dengan menggunakan *mixed strategy* berdasarkan kriteria maksimin (pemain baris).

		II	
		1	2
I	1	3	–2
	2	–1	2

3. Selesaikan permainan yang mempunyai matriks pay-off berikut dengan menggunakan *mixed strategy* berdasarkan kriteria minimaks (pemain kolom).

a.

		II		
		1	2	3
I	1	1	–1	3
	2	0	4	1
	3	3	–2	5
	4	–3	6	–2

c.

		II			
		1	2	3	4
	1	1	–3	2	–2
	2	2	3	0	3
	3	0	4	–1	–3
	4	–4	0	–2	2

b.

		II			
		1	2	3	4
I	1	5	0	3	1
	2	2	4	3	2
	3	3	2	0	4